الشرح الوافى

الجبر

الصف الاول الثانوى

الترم الاول

اعداد الاستاذ/ على حمدون
معلم اول (أ) بمعهد بنى عدى الثانوى
بنين

حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في متغير واحد هي $أ س^2 + ب س + حـ = 0$

حيث أ، ب، حـ $\in$ ح ، أ $\neq$ صفر

* المقصود بحل المعادلة هو ايجاد قيم س التي تحقق المعادلة ويوجد طريقتان لحل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد وهما

(1) الحل الجبري (2) الحل البياني

أولا : الحل الجبري

(1) باستخدام التحليل

(2) باستخدام القانون العام $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 أ حـ}}{2 أ}$

حيث أ معامل $س^2$ ، ب معامل س ، حـ الحد المطلق

مثال أوجد مجموعة حل المعادلات الاتية في ح

(1) $س^2 - 5 س - 6 = 0$

(2) $س^2 - 4 س - 6 = 0$

(3) $س (س - 4) = 3$

(4) $س + \frac{5}{س} = 4$ حيث $س \neq$ صفر

الحل

(1) $\because$ المقدار سهل التحليل ← يفضل استخدام التحليل

في حل المعادلة

∵ س² − ٥س − ٦ = ٠ ∴ (س − ٦)(س + ١) = ٠

∴ إما س − ٦ = ٠ منها س = ٦

أو س + ١ = ٠ منها س = −١

∴ م.ح = {−١ ، ٦}

(٢) ∵ س² − ٤س − ٦ = ٠ لا يمكن تحليل هذا المقدار

∴ نستخدم القانون العام في حل المعادلة

∵ س = (−ب ± √(ب² − ٤أجـ)) ÷ ٢أ حيث أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = −٦

∴ س = (٤ ± √(١٦ − ٤×١×−٦)) ÷ (٢×١) ∴ س = (٤ ± √٤٠) ÷ ٢

∴ س = (٤ ± ٢√١٠) ÷ ٢ = ٢ ± √١٠

∴ م.ح = {٢ + √١٠ ، ٢ − √١٠}

(٣) ∵ س(س − ٤) = ٣ ← فك الأقواس أولاً

∴ س² − ٤س = ٣ ← تصفير المعادلة

∴ س² − ٤س − ٣ = ٠ ← التحليل غير ممكن

∴ نستخدم القانون العام

∵ س = (−ب ± √(ب² − ٤أجـ)) ÷ ٢أ حيث أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = −٣

∴ س = (٤ ± √(١٦ + ١٢)) ÷ ٢ ∴ س = (٤ ± √٢٨) ÷ ٢

∴ س = (٤ ± ٢√٧) ÷ ٢ = ٢ ± √٧ ∴ م.ح = {٢ + √٧ ، ٢ − √٧}

(٤) ∵ $س + \frac{٥}{س} = ٤$ بضرب الطرفين × س ينتج

$س^٢ + ٥ = ٤س$ بتصفير المعادلة ينتج

$س^٢ - ٤س + ٥ = ٠$ باستخدام القانون العام

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ حيث أ = ١ ، ب = -٤ ، جـ = ٥

∴ $س = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٢٠}}{٢}$ ∴ $س = \frac{٤ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$

∵ $\sqrt{-٤}$ عدد غير حقيقي ∴ س عدد غير حقيقي

∴ م . ح = ∅

قواعد هامة

(١) معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد لها حلين حقيقين على الأكثر

(٢) عدد جذور معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد = ٢ جذر

(٣) اذا كان لمعادلة الدرجة الثانية في متغير واحد جذران مختلفان فانه عدد الجذور = ٢
عدد الحلول = ٢

(٤) اذا كان لمعادلة الدرجة الثانية في متغير واحد جذران متساويان فانه عدد الجذور = ٢
عدد الحلول = ١

مثال

عدد جذور المعادلة $س^٢ - ٢س + ١ = ٠$ يساوي ......
بينما عدد حلولها يساوي ......

الحل

∵ $س^2 - 2س + 1 = 0$

∴ $(س - 1)(س - 1) = 0$ منها $س - 1 = 0$ ∴ $س = 1$

أو $س - 1 = 0$ ∴ $س = 1$

∴ م . ح = {1}

∴ عدد الجذور = 2 بينما عدد الحلول = 1

(5) اذا كان م أحد جذري المعادلة $أ س^2 + ب س + جـ = 0$

فانه عند س = م تحققه المعادلة ⟸

أي أن $أ م^2 + ب م + جـ = 0$

مثال

اذا كان 3 أحد جذري المعادلة

$س^2 - ب س - 6 = 0$ فانه ب = ...

الحل

∵ 3 أحد جذري المعادلة ∴ $(3)^2 - ب × 3 - 6 = 0$

∴ $9 - 3ب - 6 = 0$ منها $3 - 3ب = 0$ ∴ $ب = 1$

(6) اذا كان (س - م) أحد عوامل المقدار $أ س^2 + ب س + جـ$

فانه عند س = م يكون $أ س^2 + ب س + جـ = 0$ وتكون

م أحد جذور المعادلة $أ س^2 + ب س + جـ = 0$

(7) اذا كانه (س - م) ، (س - ل) عوامل المقدار $أ س^2 + ب س + جـ$

فانه م ، ل يكونان جذرا المعادلة $أ س^2 + ب س + جـ = 0$

والعكس صحيح بمعنى أنه اذا كان ل ، م جذرا المعادلة

$س^2 + ب س + جـ = 0$ فانه $(س - ل)(س - م) = 0$

مثال اذا كان $(س-٢)$ أحد عوامل المقدار $س^{٢}-٧س+ك$ فإن $ك=.....$

الحل

$\because (س-٢)$ أحد عوامل المقدار $س^{٢}-٧س+ك$

$\therefore$ عند $س=٢$ فإن $س^{٢}-٧س+ك=٠$

$\therefore (٢)^{٢}-٧\times٢+ك=٠$ $\therefore ٤-١٤+ك=٠$ منها $ك=١٠$

مثال اذا كان $\sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{٣}$ هما جذرا المعادلة $س^{٢}+ب س+حـ=٠$ فإن $ب+حـ=.....$

الحل

$\because \sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{٣}$ جذرا المعادلة $س^{٢}+ب س+حـ=٠$ (1)

$\therefore (س-\sqrt{٣})(س-(-\sqrt{٣}))=٠$

$\therefore (س-\sqrt{٣})(س+\sqrt{٣})=٠$ منها $س^{٢}-٣=٠$ (2)

بمقارنة المعاملات في المعادلتين (1) ، (2) ينتج

$ب=٠$ ، $حـ=-٣$ $\therefore ب+حـ=-٣$

تدريب

(١) اذا كانت $س=٤$ أحد جذري المعادلة $س^{٢}+م س=٤$ فإن $م=.....$

(٢) مجموعة حل المعادلة $(س-٣)^{٢}=٥$ في ح تساوي .....

(٣) الجذر المشترك للمعادلتين $س^{٢}-٣س+٢=٠$ ، $٢س^{٢}-٥س+٢=٠$ هو .....

(٤) عدد حلول المعادلة $س^{٢}-٦س+٩=٠$ يساوي .....

(٥) مجموعة حل المعادلة $\frac{٣}{س-٢}+\frac{٢}{س+٢}=٢$ حيث $س \notin \{٢،-٢\}$ تساوي .....

Scanned by CamScanner

ثانياً الحل البيانى

لحل المعادلة التربيعية بيانياً نتبع الاتى :-

(١) نضع المعادلة التربيعية على الصورة أ س² + ب س + حـ = ٠

(٢) نفرض أن د(س) = أ س² + ب س + حـ ثم نرسم منحنى هذه الدالة

(٣) نعين نقط تقاطع منحنى الدالة د(س) مع محور السينات

(٤) الاحداثى السينى لنقط تقاطع المنحنى مع محور السينات هو جذور المعادلة د(س) = ٠ (أ س² + ب س + حـ = ٠)

ملاحظات هامة

من الرسم البيانى لمنحنى الدالة نستنتج :-

(١) اذا كان منحنى الدالة يقطع محور السينات فى نقطتين فان المعادلة يكون لها جذران حقيقيان مختلفان

(٢) اذا كان المنحنى يمس محور السينات فان المعادلة يكون لها جذران حقيقيان متساويان

(٣) اذا كان المنحنى لا يقطع محور السينات فان المعادلة لا يكون لها جذور حقيقية أى أن م.ح = $\varnothing$ فى ح
ويكون لها جذران مركبان (جذران ينتميان للاعداد المركبة)

(٤) اذا كانت د(س) = أ س² + ب س + حـ فان :

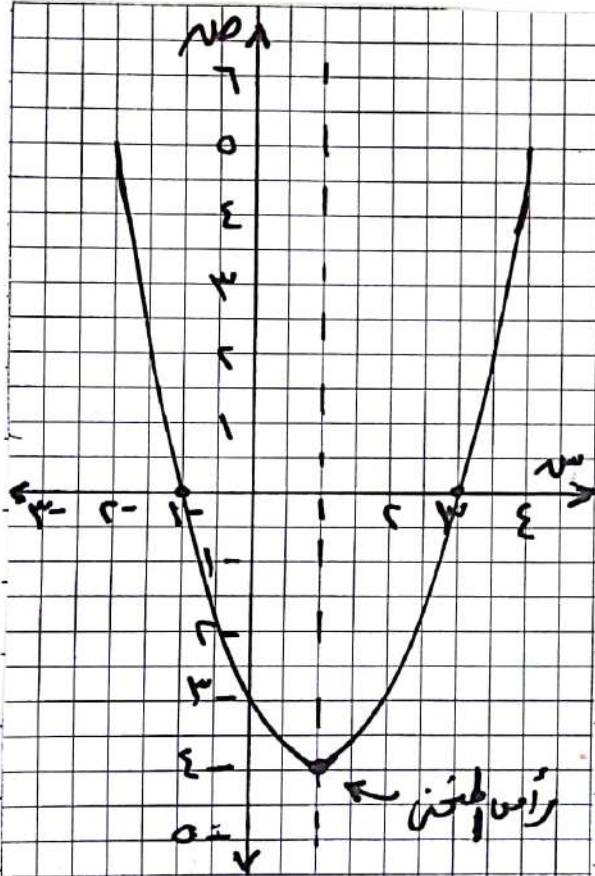
* نقطة رأس المنحنى هى $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$
* الحد المطلق حـ = د(٠) وهو يمثل الجزء المقطوع من محور ص بواسطة المنحنى
* اذا كانت أ > ٠ (موجبة) فان منحنى الدالة د(س) يكون مفتوحاً لاعلى
* اذا كانت أ < ٠ (سالبة) فان منحنى الدالة د(س) يكون مفتوحاً لاسفل
* نقطة تقاطع منحنى الدالة د(س) مع محور الصادات هى (٠ ، حـ)
* اذا كانت حـ > ٠ فان منحنى الدالة يقطع جزءاً موجباً من محور الصادات

* إذا كانت حـ < ٠ فإن المنحنى يقطع جزءاً سالباً من محور ص

مثال

أوجد بيانياً في ح مجموعة حل المعادلة
س٢ - ٢س - ٣ = ٠ مستعيناً بالفترة [-٢ ، ٤]
ثم ادرس الدالة

الحل

س	س٢	-٢س	-٣	ص
-٢	٤	٤	-٣	٥
-١	١	٢	-٣	٠
٠	٠	٠	-٣	-٣
١	١	-٢	-٣	-٤
٢	٤	-٤	-٣	-٣
٣	٩	-٦	-٣	٠
٤	١٦	-٨	-٣	٥

من الشكل البياني لمنحنى الدالة
د(س) = س٢ - ٢س - ٣ نجد أن

(١) مجموعة حل المعادلة س٢ - ٢س - ٣ = ٠ هي {-١ ، ٣}
(٢) نقطة رأس المنحنى = (١ ، -٤)
(٣) محور تماثل المنحنى هو المستقيم س = ١
(٤) المنحنى يقطع محور الصادات عند النقطة (٠ ، -٣)
(٥) القيمة الصغرى للدالة = -٤

* لاحظ أن المنحنى يقطع محور الصادات عند النقطة (٠ ، الحد المطلق) (٠ ، حـ)

مثال أُوجد في ح مجموعة حل المعادلة الآتية بيانياً حيث ٢س^٢ − ٢(٢ − س) = ٠

الحل

∵ ٢س^٢ − ٢(٢ − س) = ٠ ∴ ٢س^٢ − ٤ + ٢س = ٠

∴ ٢س^٢ + ٢س − ٤ = ٠

وبفرض أن د(س) = ٢س^٢ + ٢س − ٤

∴ أ = ٢ ، ب = ٢ ، جـ = −٤

∵ لإيجاد فترة مناسبة لرسم منحنى الدالة لابد من إيجاد الإحداثي السيني لرأس المنحنى وهو س = −ب / ٢أ

∴ س = −٢ / (٢ × ٢) = −١ / ٢

∴ يمكن رسم منحنى الدالة على الفترة [−٣ ، ٣]

س	٢س^٢	٢س	−٤	ص
−٣	١٨	−٦	−٤	٨
−٢	٨	−٤	−٤	٠
−١	٢	−٢	−٤	−٤
٠	٠	٠	−٤	−٤
١	٢	٢	−٤	٠
٢	٨	٤	−٤	٨
٣	١٨	٦	−٤	٢٠

من الشكل البياني

م.ح = {−٢ ، ١}

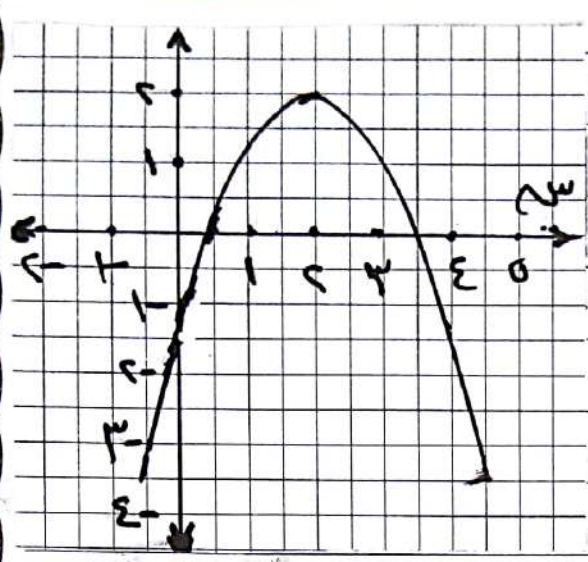
مثال

الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د(س) = أس^{٢} + ب س + حـ

أجب عن الآتي

(١) مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ تساوي ....

(٢) نقطة رأس المنحنى هي ....

(٣) معادلة محور تماثل الدالة هي ....

(٤) القيمة العظمى للدالة = ...

(٥) العدد الثابت حـ = ...

(٦) العدد الثابت أ يمكن أن يكون ..... (أ > ٠ ، أ < ٠ ، أ = ٠)

(٧) العدد الثابت ب يمكن أن يكون .... (ب > ٠ ، ب < ٠ ، ب = ٠)

الحل

(١) مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ تساوي {$\frac{١}{٢}$ ، ٣$\frac{١}{٢}$}

(٢) نقطة رأس المنحنى هي (٢ ، ٢)

(٣) معادلة محور تماثل الدالة هي س = ٢

(٤) القيمة العظمى للدالة = ٢

(٥) العدد الثابت حـ = -١$\frac{١}{٢}$

(٦) ∵ المنحنى مفتوح لأسفل ∴ أ < ٠

(٧) ∵ الإحداثي السيني لرأس المنحنى = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-\text{معامل س}}{٢\ \text{معامل س}^{٢}}$

∴ ٢ = $\frac{-ب}{\text{عدد سالب}}$ ∴ -ب = عدد سالب × ٢

∴ -ب = عدد سالب

∴ ب عدد موجب

∴ ب > ٠

أ/ علي حمدون

مقدمة عن الأعداد المركبة

* تمهيد :-

أوجد مجموعة حل المعادلة $س^2 + 1 = 0$ في ح

الحل

$\because س^2 + 1 = 0 \quad \therefore س^2 = -1 \quad \therefore س = \pm\sqrt{-1} \notin ح$

$\therefore م.ح = \emptyset$ أي أن المعادلة ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية لذلك كانت هناك الحاجة لتوسيع مجموعة التعويض لتشمل كل الحلول الممكنة

العدد التخيلي (ت)

يعرف العدد التخيلي (ت) بأنه العدد الذي مربعه يساوي -1

أي أن $ت^2 = -1$

وعلى ذلك يمكن حل المعادلات التي ليس لها جذور حقيقية

مثل $س^2 + 1 = 0$ ، منها $س^2 = -1$

$\therefore س^2 = \pm\sqrt{-1} \quad \therefore س^2 = \pm\sqrt{ت^2}$

$\therefore س = \pm ت \quad \therefore م.ح = \{-ت ، ت\}$

* مثال آخر :-

اوجد مجموعة حل المعادلة $س^2 + 4 = 0$.

الحل

$\because س^2 = -4 \quad \therefore س = \pm\sqrt{-4} \quad \therefore س = \pm\sqrt{4ت^2}$

$\therefore س = \pm 2ت \quad \therefore م.ح = \{-2ت ، 2ت\}$

وقس على ذلك

تدريب

اوجد مجموعة حل المعادلة

(1) $س^2 + 9 = 0$ (2) $س^2 + 2 = 0$

خواص العدد التخيلي (ت)

(١) ت $\notin$ ح أي أن العدد التخيلي (ت) لا ينتمي للأعداد الحقيقية وبعيد كل البعد عنها

(٢) إذا كان م $\in$ ح* أي أن م عدد حقيقي لا يساوي الصفر فإن م×ت يكون عدد تخيلياً

مثل ٢ت ، -٥ت ، $\sqrt{٣}$ ت ، ......

(٣) العمليات على الجذور التربيعية لا يمكن تعميمها على الأعداد التخيلية.

فإذا كان م ، ب عددين حقيقيين سالبين فإن

$$\sqrt{م} \times \sqrt{ب} \neq \sqrt{م ب}$$

مثلاً $\sqrt{-١} \times \sqrt{-١} \neq \sqrt{-١ \times -١}$

لأن $\sqrt{-١} \times \sqrt{-١} = \sqrt{ت^{٢}} \times \sqrt{ت^{٢}} = ت \times ت = -١$

بينما $\sqrt{-١ \times -١} = \sqrt{١} = ١$

(٤) قوى (ت) الصحيحة :-

$ت^{٢} = -١$

$ت^{٣} = ت^{٢} \times ت = -ت$

$ت^{٤} = ت^{٢} \times ت^{٢} = -١ \times -١ = ١$

$ت^{٤ن} = ١$ حيث ن $\in$ ص مثلاً $ت^{٣٦} = ت^{٤\times٩} = ١$

$ت^{٤ن+١} = ت$ مثلاً $ت^{٢١} = ت^{٤\times٥+١} = ١ \times ت = ت$

$ت^{٤ن+٢} = -١$ مثلاً $ت^{١٨} = ت^{٤\times٤+٢} = ١ \times ت^{٢} = -١$

$ت^{٤ن+٣} = -ت$ مثلاً $ت^{٣٩} = ت^{٤\times٩+٣} = ١ \times ت^{٣} = -ت$

مثال : ضع في ابسط صورة الاعداد الاتية

$ت^{12}$ ، $ت^{15}$ ، $ت^{50}$ ، $ت^{25}$ ، $ت^{-3}$ ، $ت^{-13}$

الحل

$ت^{12} = 1$ ، $ت^{15} = ت^{3} = -ت$

$ت^{50} = ت^{2} = -1$ ، $ت^{25} = ت$

$ت^{-3} = ت^{-3} \times ت^{4} = ت$ ، $ت^{-13} = ت^{-13} \times ت^{16} = ت^{3} = -ت$

مجموعة الاعداد المركبة

* تعريف العدد المركب :-

إذا كانت س ، ص عددين حقيقيين فإن المقدار س + ت ص يسمى عدداً مركباً حيث $ت^{2} = -1$

اى أن العدد المركب في صورته العامة يتكون من جزئين جزء حقيقي = س

جزء تخيلي = ت ص

* الصورة الجبرية للعدد المركب هي ع = س + ت ص

فإذا كانت ص = ٠ فإن ع = س عدد حقيقي صرف

إما اذا كانت س = ٠ فإن ع = ت ص عدد تخيلي صرف

ومن امثلة الاعداد المركبة :-

$2 + 3ت$ ، $\sqrt{2} - ت$ ، $5 - \sqrt{3}\,ت$ ، 3 ، $5ت$

* ملاحظة هامة

$2 + 3ت$ عدد مركب الجزء الحقيقي 2 والجزء التخيلي $3ت$

3 عدد مركب الجزء الحقيقي 3 والجزء التخيلي صفر

$5ت$ عدد مركب الجزء الحقيقي صفر والجزء التخيلي $5ت$

* مجموعة الأعداد المركبة هي $\text{ك} = \{\text{س} + \text{ت ص} : \text{س} ، \text{ص} \in \text{ح} ، \text{ت}^2 = -1\}$

مثال

أوجد مجموعة حل المعادلة $\text{س}^2 - ٦\text{س} + ٢٥ = ٠$

الحل

$\because \text{س}^2 - ٦\text{س} + ٢٥ = ٠$ ، $\therefore \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - ٤\text{أ جـ}}}{٢\text{أ}}$

حيث $\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = -٦$ ، $\text{جـ} = ٢٥$

$\therefore \text{س} = \frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٤ \times ٢٥}}{٢ \times ١}$ ، $\therefore \text{س} = \frac{٦ \pm \sqrt{-٦٤}}{٢}$

$\therefore \text{س} = \frac{٦ \pm \sqrt{٦٤\text{ت}^2}}{٢}$ ، $\therefore \text{س} = \frac{٦ \pm ٨\text{ت}}{٢}$

$\therefore \text{س} = ٣ \pm ٤\text{ت}$ ، $\therefore \text{م.ح} = \{٣ - ٤\text{ت} ، ٣ + ٤\text{ت}\}$

مثال

أوجد مجموعة حل المعادلة $٢\text{س}^2 + ٣\text{س} + ٥ = ٠$

الحل

$\because ٢\text{س}^2 + ٣\text{س} + ٥ = ٠$ ، $\therefore \text{أ} = ٢$ ، $\text{ب} = ٣$ ، $\text{جـ} = ٥$

$\therefore \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - ٤\text{أ جـ}}}{٢\text{أ}}$ ، $\therefore \text{س} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٤٠}}{٤}$

$\therefore \text{س} = \frac{-٣ \pm \sqrt{-٣١}}{٤}$ ، $\therefore \text{س} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٣١}\,\text{ت}}{٤}$

$\therefore \text{م.ح} = \left\{\frac{-٣ - \sqrt{٣١}\,\text{ت}}{٤} ، \frac{-٣ + \sqrt{٣١}\,\text{ت}}{٤}\right\}$

تساوي عددين مركبين

اذا كان $ع_1 = س + ت ص$ ، $ع_2 = أ + ب ت$ فإنه

$ع_1 = ع_2$ اذا كان $س = أ$ ، $ص = ب$ والعكس صحيح

أي أن العددين المركبين يتساويان اذا كان الجزء الحقيقي في العدد الاول يساوي الجزء الحقيقي في العدد الثاني والجزء التخيلي في العدد الاول يساوي الجزء التخيلي في العدد الثاني والعكس صحيح

مثال أوجد قيمة س ، ص الحقيقية اذا كان

(1) $س + ت ص = 5 - 3 ت$ (2) $4 س - ص + (2 س + ص) ت = 50$

الحل

(1) ∵ $س + ت ص = 5 - 3 ت$ عددان مركبان متساويان

∴ $س = 5$ ، $ت ص = -3 ت$

∴ $س = 5$ ، $ص = -3$

(2) ∵ $4 س - ص + (21 س + ص) ت = 50$ تساوي عددين مركبين

∴ $4 س - ص = 50$ ← ①

$21 س + ص = صفر$ ← ②

بجمع ① ، ② ينتج

$25 س = 50$ منها $س = 2$

بالتعويض في ① ∴ $ص = -42$

جمع عددين مركبين

إذا كان ع١ = س١ + ص١ ت ، ع٢ = س٢ + ص٢ ت فإن

ع١ + ع٢ = (س١ + س٢) + (ص١ + ص٢) ت

أي أنه عند جمع عددين مركبين نجمع الجزء الحقيقي مع الجزء الحقيقي ونجمع الجزء التخيلي مع الجزء التخيلي

مثال

أوجد ناتج ما يأتي:

(١) (٣ - ٤ت) + (٥ + ٣ت)   (٢) (١ - ت) - (٢ + ٣ت)

الحل

(١) (٣ - ٤ت) + (٥ + ٣ت) = ٨ - ت

(٢) (١ - ت) - (٢ + ٣ت) = ١ - ت - ٢ - ٣ت

= -١ - ٤ت

مثال

إذا كان (س + ٧ت) + (٥ - ص ت) = ٠

أوجد قيمة س ، ص الحقيقيتين

الحل

∵ (س + ٧ت) + (٥ - ص ت) = ٠

∴ (س + ٥) + (٧ - ص) ت = ٠ تساوي عددين مركبين

∴ س + ٥ = ٠ ، منها س = -٥

٧ - ص = ٠ ، منها ص = ٧

مثال إذا كان $س^2 - ص^2 + (س+ص)ت = 3 + 3ت$

أوجد قيمة س ، ص الحقيقيتين

الحل

∵ $س^2 - ص^2 + (س+ص)ت = 3+3ت$ تساوي عددين مركبين

∴ $س^2 - ص^2 = 3$ ← (1)

$س + ص = 3$ ← (2) منها $ص = 3 - س$ ← I

بالتعويض من I في (1)

∴ $س^2 - (3 - س)^2 = 3$ ∴ $س^2 - 9 + 6س - س^2 = 3$

∴ $6س = 12$ منها $س = 2$ بالتعويض في I

$ص = 1$

ضرب عددين مركبين

إذا كان $ع_1 = س_1 + ص_1 ت$ ، $ع_2 = س_2 + ص_2 ت$ فإن

$ع_1 ع_2 = (س_1 س_2 - ص_1 ص_2) + ت(س_1 ص_2 + س_2 ص_1)$

مثال أوجد ناتج $(4+3ت)(2+5ت)$

الحل

∵ $(4+3ت)(2+5ت) = 8 + 26ت - 15$

$= -7 + 26ت$

* تدريب: أوجد ناتج

(1) $(4+3ت)(2-5ت)$ (2) $(4-3ت)(2-5ت)$

مثال اذا كان ٢س + ٣ص ت = (٣ + ٢ت)(٢ − ت)
أوجد قيمة س ، ص

الحل

∵ ٢س + ٣ص ت = (٣ + ٢ت)(٢ − ت) إجراء الضرب أولاً
= ٦ + ت + ٢
∴ ٢س + ٣ص ت = ٨ + ت تساوي عددين مركبين
∴ ٢س = ٨ منها س = ٤
٣ص = ١ منها ص = $\frac{١}{٣}$

مثال اذا كان س + ت ص = (٢ − ٣ت)^{٢}
أوجد قيمة س ، ص

الحل

∵ س + ت ص = (٢ − ٣ت)(٢ − ٣ت) إجراء الضرب أولاً
= ٤ − ١٢ت − ٩
∴ س + ص ت = −٥ − ١٢ت عددان مركبان متساويان
∴ س = −٥ ، ص = −١٢

العددان المترافقان

اذا كان ع = س + ص ت فإن مرافق العدد المركب ع هو العدد المركب ع̄ = س − ص ت
أي أن العدد المرافق ع̄ يختلف عن العدد الأصلي ع في إشارة الجزء التخيلي فقط

مثال أوجد مرافق الأعداد الآتية

(١) ٣ + ٢ت   (٢) ت - ١   (٣) -١ - ٥ت

(٤) ٨   (٥) ٨ت

الحل

(١) مرافق العدد ٣ + ٢ت هو ٣ - ٢ت

(٢) مرافق العدد ت - ١ هو -ت - ١

(٣) " " -١ - ٥ت هو -١ + ٥ت

(٤) " " ٨ هو ٨

(٥) " " ٨ت هو -٨ت

مثال إذا كان ع = ٣ - ٤ت

أوجد ع̄ ومن ثم أوجد ناتج العمليات الآتية

(١) ع + ع̄   (٢) ع - ع̄

(٣) ع × ع̄

الحل

∵ ع = ٣ - ٤ت   ∴ ع̄ = ٣ + ٤ت

(١) ∴ ع + ع̄ = ٦   ضعف الجزء الحقيقي للعدد الأصلي ع

(٢) ع - ع̄ = (٣ - ٤ت) - (٣ + ٤ت)

= -٨ت   عدد تخيلي صرف

(٣) ع × ع̄ = (٣ - ٤ت)(٣ + ٤ت)

= ٩ + صفر + ١٦

= ٩ + ١٦ = ٢٥   عدد حقيقي صرف

ملاحظات

(١) مجموع عددين مركبين مترافقين = عدد حقيقي

(٢) طرح عددين مركبين مترافقين = عدد تخيلي

(٣) حاصل ضرب عددين مركبين مترافقين = عدد حقيقي

$= \text{س}^2 + \text{ص}^2$

* مثلا $(٥ - ٢\text{ت})(٥ + ٢\text{ت}) = ٢٥ + ٤ = ٢٩$

(٤) $\overline{\text{ع}_1 + \text{ع}_2} = \overline{\text{ع}}_1 + \overline{\text{ع}}_2$ اى أن مرافق مجموع عددين مركبين يساوي مرافق الاول + مرافق الثاني

* مثلا: اذا كان $\text{ع}_1 = ١ + \text{ت}$ ، $\text{ع}_2 = ٣ - ٢\text{ت}$

أثبت أن $\overline{\text{ع}_1 + \text{ع}_2} = \overline{\text{ع}}_1 + \overline{\text{ع}}_2$

الحل

$\because \text{ع}_1 = ١ + \text{ت}$ ، $\text{ع}_2 = ٣ - ٢\text{ت}$ $\therefore \text{ع}_1 + \text{ع}_2 = ٤ - \text{ت}$

$\therefore \overline{\text{ع}_1 + \text{ع}_2} = ٤ + \text{ت}$ ← (١)

$\because \overline{\text{ع}}_1 = ١ - \text{ت}$ ، $\overline{\text{ع}}_2 = ٣ + ٢\text{ت}$ $\therefore \overline{\text{ع}}_1 + \overline{\text{ع}}_2 = ٤ + \text{ت}$ ← (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن $\overline{\text{ع}_1 + \text{ع}_2} = \overline{\text{ع}}_1 + \overline{\text{ع}}_2$

(٥) $\overline{\text{ع}_1 \times \text{ع}_2} = \overline{\text{ع}}_1 \times \overline{\text{ع}}_2$ اى أن مرافق حاصل ضرب عددين = مرافق الاول × مرافق الثاني

(٦) $\overline{\left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}\right)} = \frac{\overline{\text{ع}}_1}{\overline{\text{ع}}_2}$ أى أن مرافق خارج قسمة عددين مركبين يساوي مرافق الاول ÷ مرافق الثاني

(٧) $\overline{(\overline{\text{ع}})} = \text{ع}$

خارج قسمة عددين مركبين

لاجراء عملية قسمة عددين مركبين أو لتبسيط الكسور لابد أن يكون مقام الكسر عدداً حقيقياً موجباً ولاجراء هذه العملية نضرب العدد بسطاً ومقاماً في مرافق المقام

مثال

ضع الاعداد الاتية في ابسط صورة

(١) $\frac{٥}{٢-ت}$ (٢) $\frac{٣+٢ت}{٢-٥ت}$

الحل

(١) ∵ $\frac{٥}{٢-ت} = \frac{٥}{٢-ت} \times \frac{٢+ت}{٢+ت} = \frac{٥(٢+ت)}{٤+١} = ٢+ت$

(٢) ∵ $\frac{٣+٢ت}{٢-٥ت} = \frac{٣+٢ت}{٢-٥ت} \times \frac{٢+٥ت}{٢+٥ت} = \frac{٦+١٩ت-١٠}{٤+٢٥}$

$= \frac{-٤+١٩ت}{٢٥} = \frac{-٤}{٢٥} + \frac{١٩}{٢٥} ت$

مثال

اذا كان $ع_١ = \frac{٢+ت}{٣+٤ت}$ ، $ع_٢ = \frac{ت}{١+٢ت}$

أثبت أن $ع_١$ ، $ع_٢$ مترافقان

الحل

∵ $ع_١ = \frac{٢+ت}{٣+٤ت} \times \frac{٣-٤ت}{٣-٤ت} = \frac{٦-٥ت+٤}{٩+١٦} = \frac{٢}{٥} - \frac{١}{٥} ت$ ①

$ع_٢ = \frac{ت}{١+٢ت} \times \frac{١-٢ت}{١-٢ت} = \frac{ت+٢}{١+٤} = \frac{٢}{٥} + \frac{١}{٥} ت$ ②

من ① ، ② ينتج أن $ع_١$ ، $ع_٢$ مترافقان

مثال اوجد قيمة س ، ص اللتين تحققان المعادلة $\frac{(2+\text{ت})(2-\text{ت})}{3+4\text{ت}} = \text{س} + \text{ت ص}$

الحل

$\because \text{س} + \text{ت ص} = \frac{(2+\text{ت})(2-\text{ت})}{3+4\text{ت}}$

$= \frac{4+1}{3+4\text{ت}} = \frac{5}{3+4\text{ت}}$

$\therefore \text{س} + \text{ت ص} = \frac{5}{3+4\text{ت}} \times \frac{3-4\text{ت}}{3-4\text{ت}} = \frac{5(3-4\text{ت})}{9+16}$

$\therefore \text{س} + \text{ت ص} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\text{ت}$ منها $\text{س} = \frac{3}{5}$ ، $\text{ص} = \frac{-4}{5}$

مثال اختصر لابسط صورة المقدار $(1+\text{ت})^4$

الحل

$\because (1+\text{ت})^4 = [(1+\text{ت})^2]^2 = [1+2\text{ت}-1]^2 = (2\text{ت})^2$

$= 4 \times -1 = -4$

مثال اوجد قيمة $(1+\text{ت})^4 - (1-\text{ت})^4$

الحل

$\because (1+\text{ت})^4 = [(1+\text{ت})^2]^2 = [1+2\text{ت}-1]^2 = (2\text{ت})^2 = -4$

$\because (1-\text{ت})^4 = [(1-\text{ت})^2]^2 = [1-2\text{ت}-1]^2 = (-2\text{ت})^2 = -4$

$\therefore$ المقدار $= (1+\text{ت})^4 - (1-\text{ت})^4 = -4 - (-4) =$ صفر

مثال اذا كان $\text{أ} + \text{ب}\,\text{ت} = \frac{٢+\text{ت}}{٢-\text{ت}}$

أثبت أن $\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ = ١$

الحل

∵ $\text{أ} + \text{ب}\,\text{ت} = \frac{٢+\text{ت}}{٢-\text{ت}} \times \frac{٢+\text{ت}}{٢+\text{ت}}$ ∴ $\text{أ} + \text{ب}\,\text{ت} = \frac{٤+٤\text{ت}-١}{٤+١}$

∴ $\text{أ} + \text{ب}\,\text{ت} = \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}\,\text{ت}$ منها $\text{أ} = \frac{٣}{٥}$ ، $\text{ب} = \frac{٤}{٥}$

∵ الطرف الأيمن $= \text{أ}^٢ + \text{ب}^٢$

$= \frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥} = \frac{٢٥}{٢٥} = ١ =$ الطرف الأيسر

* حل آخر :-

∵ $\text{أ} + \text{ب}\,\text{ت} = \frac{٢+\text{ت}}{٢-\text{ت}}$ ← ① بأخذ مرافق الطرفين

∴ $\text{أ} - \text{ب}\,\text{ت} = \frac{٢-\text{ت}}{٢+\text{ت}}$ ← ② بضرب ① × ② ينتج

$\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ = ١$

مثال أوجد ناتج ما يأتي

(١) $\text{ت} + \text{ت}^٢ + \text{ت}^٣ + \text{ت}^٤ =$ ...... (٢) $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٨} =$ ......

الحل

(١) المقدار $= \text{ت} - ١ - \text{ت} + ١ =$ صفر

(٢) $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٨} = \sqrt{٢\text{ت}^٢} \times \sqrt{٨\text{ت}^٢}$

$= \sqrt{٢}\,\text{ت} \times \sqrt{٨}\,\text{ت} = \sqrt{١٦}\,\text{ت}^٢ = -٤$

مثال اختر الإجابة الصحيحة

(١) المعكوس الجمعي للعدد (٥ - ٢ت) هو ......

(أ) -٥+٢ت (ب) ٥+٢ت (جـ) -٥-٢ت (د) غير ذلك

(٢) $١+ت+ت^٢+ت^٣+ت^٤+ت^٥+ت^٦+ت^٧+ت^٨ =$ ......

(أ) ١ (ب) ٢+ت (جـ) ١-ت (د) ١+ت

(٣) $\frac{١+ت+٢ت^٢+٢ت^٣}{١-٥ت+٣ت^٢-٣ت^٣} =$ ......

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{-١}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٢}$

(٤) $\frac{\sqrt{٢} - \sqrt{-٢}}{\sqrt{٢} + \sqrt{-٢}} =$ ......

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) -ت (د) ت

(٥) اذا كان ٢ل+٣م ت = ٤ن - ٧٢ت فإن م+ن = ...

(أ) -٩ (ب) -٦ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٦) اذا كانت س + ت ص = $ت^{٢٣} + ٣\sqrt{-٤}$ فإن س+ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٥ت (د) ٣+٢ت

(٧) اذا كان أ، ب، جـ، هـ أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية فإن $ت^أ + ت^ب + ت^{جـ} + ت^هـ =$ ......

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) ت

(٨) اذا كان $ت^م = ت^ن$ حيث م ≠ ن فإن أ صفرقية

المقدار (م − ن) يساوي ....

أ) صفر   ب) ١   جـ) ٢   د) ٤

(٩) أصغر عدد صحيح موجب (ن) يجعل $\left(\frac{1+ت}{1-ت}\right)^{ن} = 1$ هو ....

أ) ٢   ب) ٤   جـ) ٨   د) ١٢

(١٠) اذا كان أ < ب < ٠ < جـ حيث أ، ب، جـ أعداد حقيقية

وكان $\sqrt{ب(جـ-أ)} + \sqrt{أب} = 2+3ت$ فإن ب جـ = ...

أ) ٣   ب) −٣   جـ) ٢   د) −٥

الحل

(١) المعكوس الجمعي = $-(5-2ت) = -5+2ت$ (أ)

(٢) $1+ت+ت^2+ت^3+ت^4+ت^5+ت^6+ت^7+ت^8$

$= 1+ت+ت^2+ت^3+ت^4 + ت + ت^2 + ت^3 + ت^8$

$= 1 + صفر + صفر = 1$

∴ المقدار = ١   (أ)

(٣) المقدار $= \frac{1+ت+2\times-1+2\times-ت}{1-5ت+3\times-1-3\times-ت} = \frac{1+ت-2-2ت}{1-5ت+3ت-3}$

$= \frac{-1-ت}{-2-2ت} = \frac{-1(1+ت)}{-2(1+ت)} = \frac{1}{2}$ (ب)

(٤) المقدار $= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}ت}{\sqrt{2}+\sqrt{2}ت} = \frac{1-ت}{1+ت}$

$= \frac{1-ت}{1+ت} \times \frac{1-ت}{1-ت} = \frac{1-2ت+1}{1+1} = -ت$ (جـ)

(٥) ∵ ٢١+٣ أ ت = ٤ ن - ٧ - ٢ ت ∴ ١٢ = ٤ ن منها ن = ٣

٣ أ = -٧ - ٢٠ منها أ = -٩ ∴ أ + ن = -٦ (ب)

(٦) ∵ س + ت ص = $ت^{٢٣}$ + ٣ $\sqrt{-٤}$

، س + ت ص = - ت + ٦ ت ∴ س + ت ص = ٥ ت

∴ س = صفر ، ص = ٥ ∴ س + ص = ٥ (د)

(٧) نفرض أن الأعداد الصحيحة المتتالية الموجبة هي

ن ، ن + ١ ، ن + ٢ ، ن + ٣

∴ المقدار = $ت^{ن}$ + $ت^{ن+١}$ + $ت^{ن+٢}$ + $ت^{ن+٣}$

= $ت^{ن}$ + $ت^{ن}$ × ت + $ت^{ن}$ × $ت^{٢}$ + $ت^{ن}$ × $ت^{٣}$

= $ت^{ن}$ + ت × $ت^{ن}$ - $ت^{ن}$ - ت × $ت^{ن}$ = صفر (أ)

(٨) ∵ $ت^{م}$ = $ت^{ن}$ ∴ $ت^{م}$ - $ت^{ن}$ = ٠ ∴ $ت^{ن}$ ($ت^{م-ن}$ - ١) = ٠

منها $ت^{ن}$ = صفر مرفوض

$ت^{م-ن}$ = ١ ∴ م - ن ∈ {٠ ، ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ...}

∴ أصغر قيمة للمقدار م - ن حيث م ≠ ن هي ٤ (ج)

(٩) ∵ $\left(\frac{ت+١}{ت-١}\right)^{ن}$ = ١ ∴ $\left[\frac{ت+١}{ت-١} \times \frac{ت+١}{ت+١}\right]^{ن}$ = ١

∴ $\left(\frac{١+٢ت-١}{١+١}\right)^{ن}$ = ١ ∴ $ت^{ن}$ = ١

، ن ∈ {٠ ، ٤ ، ٨ ، ...} ∴ أصغر عدد صحيح موجب هو ٤ (ب)

(١٠) يترك للطالب

أمثلة متنوعة على الدرس الأول والثاني

مثال

أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية في ح

(1) $س^2 = 2س$ (2) $س^2 + 4 = 0$

الحل

(1) ∵ $س^2 = 2س$ ∴ $س^2 - 2س = 0$ ∴ $س(س - 2) = 0$

∴ إما $س = 0$ أو $س - 2 = 0$ ومنها $س = 2$

∴ م.ح = $\{0 ، 2\}$

(2) ∵ $س^2 + 4 = 0$ ∴ $س^2 = -4$ ∴ م.ح = $\emptyset$

مثال

إذا كانت النقطة (1، −4) هي رأس المنحنى $د(س) = س^2 + 2ب س + حـ$ فإن $ب \times حـ = ...$

الحل

∵ إحداثي رأس المنحنى = $\left(\frac{-معامل\ س}{2 \times معامل\ س^2} ، د\left(\frac{-معامل\ س}{2 \times معامل\ س^2}\right)\right)$

∴ $1 = \frac{-2ب}{2 \times 1}$ ومنها $ب = -1$ ← (1)

∵ (1، −4) ∈ المنحنى فهما تحققه معادلته $ص = د(س)$

∴ $-4 = د(1)$ ∴ $-4 = (1)^2 + 2ب \times 1 + حـ$

∴ $-4 = 1 + 2ب + حـ$ ∴ $-4 = 1 + 2 \times -1 + حـ$

∴ $-4 = 1 - 2 + حـ$ ∴ $حـ = -3$ ← (2)

من (1) ، (2) ينتج $ب \times حـ = -1 \times -3 = 3$

مثال اذا كانت د(س) = (أ+٣)$س^{٣}$ + $س^{ب-٢}$ + ٥س + ١٤ دالة من الدرجة الثانية فإن أ + ب = ...

الحل

∵ الدالة د(س) دالة من الدرجة الثانية

∴ درجة أي حد من حدودها لا تزيد عن ٢

∴ لابد من حذف الحد (أ+٣)$س^{٣}$ أو بمعنى آخر لابد أن يكون معامل $س^{٣}$ = صفر ← ∴ أ + ٣ = ٠

منها أ = -٣ ← ①

∵ الدالة من الدرجة الثانية ∴ ب - ٢ = ٢

منها ب = ٤ ← ②

من ① ، ② ينتج أن أ + ب = -٣ + ٤ = ١

ملاحظات هامة

اذا كانت الدالة د(س) دالة من الدرجة الثانية وكان د(م) = د(ن) فإن

(١) معادلة محور تماثل الدالة هي المستقيم س = $\frac{م + ن}{٢}$

(٢) الاحداثي السيني لنقطة رأس المنحنى هو $\frac{م + ن}{٢}$

مثال اذا كانت د(س) دالة من الدرجة الثانية وكان د(٣) = د(-٧) فإن معادلة محور تماثل الدالة هي.......

الحل

∵ د(٣) = د(-٧)

∴ معادلة محور تماثل الدالة هي س = $\frac{٣ + (-٧)}{٢}$ ∴ س = -٢

مثال

(أ) ابسط صورة للعدد $(1+\sqrt{-1})^4$ هي ....

(ب) ابسط صورة للعدد $(1+\sqrt{-1})^7$ هي ....

الحل

(أ) ∵ $(1+\sqrt{-1})^4 = (1+\text{ت})^4 = [(1+\text{ت})^2]^2$

$= (1+2\text{ت}-1)^2 = (2\text{ت})^2 = -4$

(ب) ∵ $(1+\sqrt{-1})^7 = (1+\sqrt{-1})^6 \times (1+\sqrt{-1})$

$= (1+\text{ت})^6 \times (1+\text{ت})$

$= [(1+\text{ت})^2]^3 \times (1+\text{ت})$

$= (2\text{ت})^3 \times (1+\text{ت}) = 8\text{ت}^3(1+\text{ت})$

$= -8\text{ت}(1+\text{ت}) = (-8\text{ت}+8)$

$= 8 - 8\text{ت}$

مثال

إذا كان $(1+2\text{ت}^2)(2+3\text{ت}^5+4\text{ت}^6) = \text{س}+\text{ص}\,\text{ت}$

فإن س ص = ...

الحل

∵ $(1+2\text{ت}^2)(2+3\text{ت}^5+4\text{ت}^6) = \text{س}+\text{ص}\,\text{ت}$

∴ $(1+2\times-1)(2+3\text{ت}+4\text{ت}^2) = \text{س}+\text{ص}\,\text{ت}$

$-1\times(2+3\text{ت}-4) = \text{س}+\text{ص}\,\text{ت}$

$-(-2+3\text{ت}) = \text{س}+\text{ص}\,\text{ت}$ منها $(2-3\text{ت}) = \text{س}+\text{ص}\,\text{ت}$

∴ س $= 2$ ، ص $= -3$ ∴ س ص $= -6$

مثال

(١) $(١+ت)(١+ت^{٢})(١+ت^{٣}) \ldots (١+ت^{٢٠٢٢}) = \ldots$

(٢) $ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤} + \ldots + ت^{١٠٠} = \ldots$

الحل

(١) المقدار $= (١+ت) \times (١-١)(١-ت) \ldots (١+ت^{٢٠٢٢})$

$= (١+ت) \times$ صفر $\times (١-ت) \ldots (١+ت^{٢٠٢٢}) =$ صفر

(٢) المقدار = صفر (يترك الاثبات للطالب)

مثال

في الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة $د(س) = م س^{٢} + ب س + حـ$

(١) محور تماثل الدالة هو ......

(٢) قيمة الثابت م = ...

(٣) مجموعة حل المعادلة $د(س) = ٠$ هي ......

(٤) م × حـ ...... اختار (م حـ > ٠ ، م حـ < ٠ ، م حـ = ٠)

(٥) م × ب ...... اختار (م ب > ٠ ، م ب < ٠ ، م ب = ٠)

الحل

(١) معادلة محور التماثل $س = -١$

(٢) $\because د(\frac{١}{٢}) = د(م) = ٠ \quad \therefore \frac{\frac{١}{٢} + م}{٢} = -١$ منها $م = -٢\frac{١}{٢}$

(٣) م . ح $= \{\frac{١}{٢} ، -٢\frac{١}{٢}\}$

(٤) $\because م > ٠ ، حـ < ٠ \quad \therefore م \times حـ <$ صفر

(٥) $\because م > ٠ ، \frac{-ب}{٢م} = -١ \quad \therefore ب = ٢م ، \therefore ب > ٠$

تمارين على الدرس الاول والثاني

(١) اذا كان أحد جذري المعادلة ٦ + ك س − س^{٢} = ٠ يساوي ٣ فإن ك = ...

(أ) ١ (ب) −١ (ج) ٢ (د) −٢

(٢) اذا كان (س − ١) أحد عوامل المقدار س^{٢} + ٢ س − ٣ فإن العامل الآخر يساوي ....

(أ) س − ٣ (ب) ٣ س (ج) س + ٣ (د) س + ١

(٣) اذا كانت (أ + ٢) س^{٢} + ب س + جـ = ٠ معادلة من الدرجة الثانية فإن أ ∈ ....

(أ) ح (ب) ح − {١} (ج) ح − {٢} (د) ح − {−٢}

(٤) اذا كان م ، ٣ جذرا المعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ فإن ....

(أ) د(٣) = م (ب) د(٣) = −٢ (ج) د(م) = د(٣) (د) غير ذلك

(٥) اذا كان منحنى الدالة د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ يمر بالنقط (٠، ١) ، (١، ٠) ، (٠، −٢) ، (−١، ٠) فإن مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ هي ....

(أ) {١، ٠} (ب) {−١، ٠} (ج) {−٢، ٠} (د) {١، −١}

(٦) نقطة رأس منحنى الدالة د(س) = س^{٢} − ١ هي ....

(أ) (١، −١) (ب) (−١، ١) (ج) (٠، ١) (د) (٠، −١)

(٧) اذا كانت $س - ٩ت = ٣ + ص ت$ فان $س + ص =$ ....

(٨) اذا كان $ع = ١ + ت$ فان $\bar{ع} =$ ....

(٩) مجموعة حل المعادلة $س^٢ + س + ١ = ٠$ تساوي ....

(١٠) ابسط صورة للعدد $\frac{٢٥}{٣ + ٤ت}$ هي ....

(١١) اذا كان $أ + ب ت = \frac{م + ل ت}{م - ل ت}$ فان $أ^٢ + ب^٢ =$ ....

(١٢) اذا كان $ع = ٣ + ٢ت$ فا $ع^٢ + \bar{ع}^٢ =$ ....

(١٣) اذا كان $ت^{٤ن + ٢} = ت^٢$ فان $ن \in$ ....

(١٤) اذا كان $ت^{٤ن + م} = -١$ حيث م، ن اعداد صحيحة فان $م \in$ ....

(١٥) اذا كان $\frac{(٤ + ٣ت)(٤ - ٣ت)}{٢ + ت} = س + ص ت$ فان $س + ص =$ ....

(١٦) $\frac{١ + ٢ت}{ت - ١} + \frac{٣}{ت + ١} =$ ....

(١٧) مرافق العدد $\frac{١٠}{٣ + ت}$ هو ....

(١٨) مرافق العدد $(٣ + \sqrt{-٤})$ هو ....

(١٩) حلل المقدار الآتي $س^٢ + ٤$ (باستخدام الأعداد المركبة)

تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية

* يتحدد نوع جذري المعادلة أ س^{2} + ب س + جـ = ٠ من خلال مميز المعادلة

* مميز المعادلة التربيعية:

يسمى المقدار ب^{2} − ٤ أ جـ
مميز المعادلة التربيعية أ س^{2} + ب س + جـ = ٠

(١) إذا كان المميز > الصفر أي أن (ب^{2} − ٤ أ جـ > ٠) يكون للمعادلة التربيعية جذران حقيقيان مختلفان وفي هذه الحالة منحنى الدالة يقطع محور السينات في نقطتين مختلفتين

(٢) إذا كان المميز = صفر أي أن (ب^{2} − ٤ أ جـ = ٠) يكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان وفي هذه الحالة فمنحنى الدالة يمس محور السينات

(٣) إذا كان المميز < صفر أي أن (ب^{2} − ٤ أ جـ < ٠) يكون للمعادلة التربيعية جذران مركبان مترافقان وغير حقيقيان وفي هذه الحالة منحنى الدالة لا يقطع محور السينات

(٤) إذا كان المميز ليس موجباً أي أن (ب^{2} − ٤ أ جـ $\leq$ ٠) يكون للمعادلة التربيعية جذران مركبان مترافقان

والعكس صحيح فيما سبق

(٥) لابد أن يفرق الطالب بين البند (٣) والبند (٤)

مثال عين نوع جذري المعادلة في كل مما يأتي :-

(1) س² − 7س + 10 = 0 (2) س² + 4س + 5 = 0

(3) 4س² − 12س = −9

الحل

(1) ∵ س² − 7س + 10 = 0 ∴ أ = 1 ب = −7 جـ = 10

∵ المميز = ب² − 4أجـ ∴ المميز = 49 − 4 × 1 × 10

∴ المميز = 49 − 40 ∴ المميز = 9 > صفر

∴ المعادلة لها جذران حقيقيان مختلفان

(2) ∵ س² + 4س + 5 = 0 ∴ أ = 1 ب = 4 جـ = 5

∵ المميز = ب² − 4أجـ ∴ المميز = 16 − 4 × 1 × 5

∴ المميز = 16 − 20 ∴ المميز = −4 < الصفر

∴ المعادلة لها جذران مركبان مترافقان غير حقيقيين

(3) ∵ 4س² − 12س + 9 = 0 ∴ أ = 4 ب = −12 جـ = 9

∵ المميز = ب² − 4أجـ ∴ المميز = 144 − 4 × 4 × 9

∴ المميز = 144 − 144 ∴ المميز = 0

∴ المعادلة لها جذران حقيقيان متساويان

مثال اوجد قيمة ك التي تجعل جذرا المعادلة

س² + 4س + ك = 0 حقيقيين مختلفين

الحل

∵ المعادلة لها جذران حقيقيان مختلفان

∵ المميز > صفر ∵ أ = ١ ب = ٤ جـ = ك

∵ ب² − ٤ أ جـ > ٠ ∴ ١٦ − ٤ × ١ × ك > ٠

∴ ١٦ − ٤ ك > ٠ منها ٤ ك < ١٦

∴ ك < ٤ ∴ ك ∈]−∞ ، ٤[

مثال

اذا كان للمعادلة س² + ك س + ٤ = ٠

جذران حقيقيان متساويان فإن ك = ...

الحل

∵ المعادلة لها جذران حقيقيان متساويان

∴ المميز = ٠ ∴ ب² − ٤ أ جـ = ٠ حيث أ = ١ ب = ك جـ = ٤

∴ ك² − ٤ × ١ × ٤ = ٠ ∴ ك² − ١٦ = ٠

∴ ك² = ١٦ ∴ ك = ± ٤

مثال

اذا كان جذرا المعادلة

س² + ٢ (ك − ١) س + (٢ ك + ١) = ٠ متساويان فإن ك = ...

الحل

∵ أ = ١ ب = ٢ (ك − ١) جـ = (٢ ك + ١)

∵ الجذران متساويان ∴ ب² − ٤ أ جـ = ٠

∴ ٤ (ك − ١)² − ٤ × ١ × (٢ ك + ١) = ٠

∴ ٤ [ك² − ٢ ك + ١] − ٨ ك − ٤ = ٠

∴ ٤ ك² − ٨ ك + ٤ − ٨ ك − ٤ = ٠

∴ ٤ ك² − ١٦ ك = ٠ ∴ ك² − ٤ ك = ٠

∴ ك (ك − ٤) = ٠ ∴ ك = ٠ ، ك = ٤

∴ ك ∈ {٠ ، ٤}

ملاحظة هامة

إذا كانت a ، b ، c معاملات المعادلة التربيعية $a س^2 + b س + c = 0$ أعداداً نسبية وكان المميز مربعاً كاملاً كان الجذران حقيقيين نسبيين

مثال

(1) أثبت أن جذر المعادلة $2س^2 - 3س - 2 = 0$ نسبيان

(2) إذا كان ل ، م عددين نسبيين أثبت أن جذرا المعادلة ل $س^2 + (ل - م) س - م = 0$ عددان نسبيان

الحل

(1) ∵ $a = 2$ ، $b = -3$ ، $c = -2$ أعداد نسبية ← (1)

∴ $b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 2 \times -2$

∴ $b^2 - 4ac = 25$ مربعاً كاملاً ← (2)

من (1) ، (2) ينتج المعادلة لها جذران حقيقيان نسبيان

(2) ∵ $a =$ ل ، $b =$ ل $-$ م ، $c = -$م

∵ ل ، م عددان نسبيان ∴ a ، b ، c أعداد نسبية (1)

∵ المميز $= b^2 - 4ac = ($ل $-$ م$)^2 - 4 \times$ ل $\times -$م

∴ المميز $=$ ل$^2 - 2$ل م $+$ م$^2 + 4$ ل م

$=$ ل$^2 + 2$ل م $+$ م^2

$= ($ل $+$ م$)^2$ مربعاً كاملاً (2)

من (1) ، (2) ينتج أن المعادلة لها جذران نسبيان

* تدريب :

إذا كان a ، b عددين نسبيين أثبت أن جذري المعادلة $a س^2 + b س + b - a = 0$ نسبيان

تمارين

(١) حدد نوع جذري المعادلة في كل مما يأتي

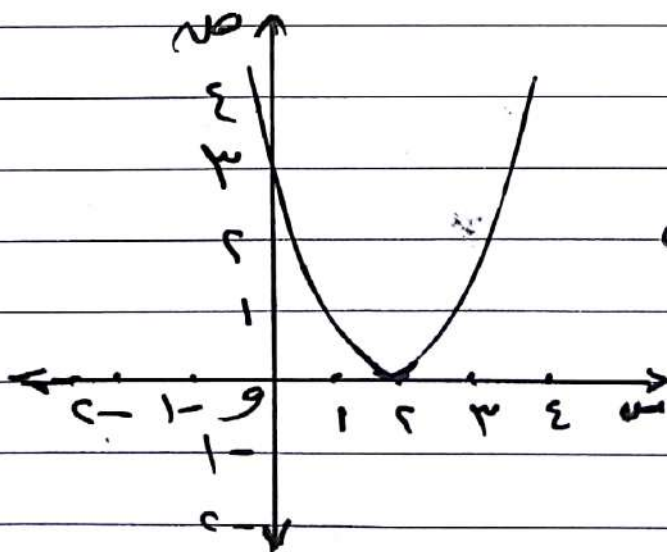
أ: $س^٢ - ٢س + ٥ = ٠$

ب- $٣س^٢ + ١٠س - ٤ = ٠$

(٢) إذا كان المعادلة $س^٢ + س + حـ = ٠$ جذران حقيقيان مختلفان فإن حـ ∈ ......

(٣) إذا كان للمعادلة $س^٢ - ٣س + ك = ٠$ جذران غير متساويان فإن ك ≠ ......

(٤) إذا كان للمعادلة $س^٢ - ٤س + حـ = ٠$ جذران مركبان فإن حـ ∈ ......

(٥) إذا كانت ب عدداً نسبياً فإن المعادلة $س^٢ - ب س + ٢٥ = ٠$ يكون لها جذران نسبيان إذا كانت ب = ...

(٦) في الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث $د(س) = أ س^٢ + ب س + حـ$ أكمل

أ) حـ = ...

ب) $ب^٢ - ٤ أ حـ$ = ...

العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

إذا كان ل ، م جذري المعادلة التربيعية
أ س^2 + ب س + ح = ٠ فإن :

(١) ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ أي أن مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^2}$

(٢) ل × م = $\frac{ح}{أ}$ أي أن حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^2}$

مثال

أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهما لكل مما
(١) س^2 + ٥ س + ٦ = ٠ (٢) س^2 − ٧ س + ٥ = ٠

الحل

(١) ∵ س^2 + ٥ س + ٦ = ٠ ∴ أ = ١ ب = ٥ ح = ٦
∴ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{-٥}{١}$ = −٥

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{ح}{أ}$ = $\frac{٦}{١}$ = ٦

(٢) ∵ س^2 − ٧ س + ٥ = ٠ ∴ أ = ١ ب = −٧ ح = ٥
∴ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{٧}{١}$ = ٧

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{ح}{أ}$ = $\frac{٥}{١}$ = ٥

مثال

إذا كان س = −٣ أحد جذري المعادلة
م س^2 + ك س − ٣ = ٠ أوجد الجذر الآخر ثم
أوجد قيمة ك

الحل

∵ $2س^2 + ك س - 3 = 0$ ∴ $أ = 2$ ، $ب = ك$ ، $جـ = -3$

وبفرض أن الجذرين هما -3 ، ل

∵ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{أ}$ ∴ $-3 \times ل = \frac{-3}{2}$

∴ $ل = \frac{1}{2}$ الجذر الآخر ← أولاً

∵ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ}$ ∴ $-3 + \frac{1}{2} = \frac{-ك}{2}$

∴ بالضرب × 2 ينتج $-6 + 1 = -ك$ ومنها $ك = 5$

مثال

إذا كان $(1 + \sqrt{2}\ ت)$ هو أحد جذري المعادلة $س^2 - 2س + جـ = 0$ أوجد الجذر الآخر وقيمة جـ

الحل

* ملحوظة هامة جداً :

إذا كان أحد جذري المعادلة التربيعية عدداً مركباً غير حقيقياً فإن الجذر الآخر يكون مرافقاً له.

∵ $(1 + \sqrt{2}\ ت)$ أحد جذري المعادلة وهو عدد مركب غير حقيقي

∴ الجذر الآخر $= 1 - \sqrt{2}\ ت$ ← أولاً

∵ الجذران هما $1 + \sqrt{2}\ ت$ ، $1 - \sqrt{2}\ ت$

∵ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{أ}$ ∴ $(1 + \sqrt{2}\ ت)(1 - \sqrt{2}\ ت) = \frac{جـ}{1}$

∴ $1 + 2 = جـ$ ∴ $جـ = 3$

أ/ علي حمدون

مثال اوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذري المعادلة س^2 - ك س + ١٢ = ٠ ثلاثة امثال الجذر الاخر

الحل

∵ س^2 - ك س + ١٢ = ٠ ∴ أ = ١ ب = -ك حـ = ١٢

وبفرض أن الجذران هما ل ، ٣ل

∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{حـ}{أ}$ ∴ ٣ل^2 = $\frac{١٢}{١}$

∴ ل^2 = ٤ منها ل = ±٢ ← I

أولا اذا كانت ل = ٢ فإن الجذران يكونان ٢ ، ٦

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$

∴ ٨ = $\frac{ك}{١}$

∴ ك = ٨ ← ①

ثانياً اذا كانت ل = -٢ فإن الجذران يكونان -٢ ، -٦

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$

∴ -٨ = $\frac{ك}{١}$

∴ ك = -٨ ← ②

من ① ، ② ينتج أن ك = ±٨

ملاحظات هامة

(١) اذا كان كلاً من جذري المعادلة التربيعية أس^2 + ب س + حـ = ٠ معكوساً جمعياً للآخر فإن ب = صفر

وتكون المعادلة على الصورة أس^2 + حـ = ٠ والعكس صحيح

ومجموع جذريها يساوي صفراً

(٢) اذا كان كلاً من جذري المعادلة التربيعية أس^2 + ب س + حـ = ٠ معكوساً ضربياً للآخر فإن أ = حـ

وتكون المعادلة على الصورة أس^2 + ب س + أ = ٠ والعكس صحيح

وحاصل ضرب جذريها يساوي واحد

مثال:

(١) مجموع الجذرين للمعادلة $٣س^٢ - ١ = ٠$ يساوي ---

(٢) حاصل ضرب الجذرين للمعادلة $٢س^٢ - ٥س + ٢ = ٠$ يساوي ---

الحل

(١) ∵ $أ = ٣$ ، $ب = ٠$ ، $جـ = ٠$

∴ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ} = \frac{صفر}{٣} =$ صفر

(٢) ∵ $أ = ٢$ ، $ب = -٥$ ، $جـ = ٢$

∴ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{أ} = \frac{٢}{٢} = ١$

مثال

أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذري المعادلة $٣س^٢ + (ك - ٣)س + ٧ = ك$

(١) معكوساً جمعياً للآخر (٢) معكوساً ضربياً للآخر

الحل

∵ $٣س^٢ + (ك - ٣)س + (٧ - ك) = ٠$

∴ $أ = ٣$ ، $ب = ك - ٣$ ، $جـ = ٧ - ك$

(١) ∵ أحد الجذرين معكوساً جمعياً للآخر ∴ $ب = ٠$

∴ $ك - ٣ = ٠$ ومنها $ك = ٣$

(٢) ∵ أحد الجذرين معكوساً ضربياً للآخر ∴ $أ = جـ$

∴ $٣ = ٧ - ك$ ومنها $ك = ٤$

تمارين

(١) مجموع جذري المعادلة $٤س^٢ + ٤س = ٣٥$ يساوي ....

(٢) حاصل ضرب جذري المعادلة $٣س^٢ = ٣٢س - ٣٠$ يساوي ....

(٣) إذا كان أحد جذري المعادلة $أس^٢ - ٣س + ٢ = ٠$ معكوساً ضربياً للآخر فإن أ = ...

(٤) إذا كان أحد جذري المعادلة $س^٢ - (ك - ٣)س + ٥ = ٠$ معكوساً جمعياً للآخر فإن ك = ...

(٥) إذا كان س = -١ جذراً للمعادلة $س^٢ - ٢س + أ = ٠$ فإن الجذر الآخر يساوي ...... وقيمة أ = ...

(٦) إذا كان (٢ + ت) أحد جذري المعادلة $س^٢ + أس + ٥ = ٠$ فإن الجذر الآخر يساوي ...... وقيمة أ = ...

(٧) أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذري المعادلة $س^٢ - ٣س + ك = ٠$ ضعف الجذر الآخر

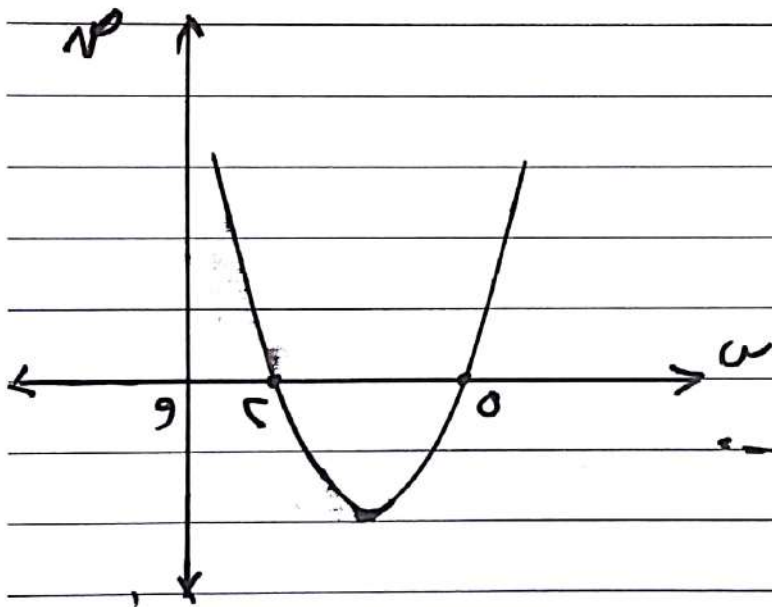
(٨) أوجد قيمة حـ التي تجعل أحد جذري المعادلة $٤س^٢ - حـ س - ٣ = ٠$ يزيد عن المعكوس الجمعي للجذر الآخر بمقدار ١

(٩) اوجد قيمتي م ، ب اذا كان

(أ) ٢ ، ٥ جذري المعادلة س² + م س + ب = ٠

(ب) -٣ ، ٧ جذري المعادلة م س² - ب س - ٢١ = ٠

(١٠) اذا كان احد جذري المعادلة ٤ك س² + ٧س + ك² + ٤ = ٠ معكوساً ضربياً للآخر فإن ك = ...

(١١) اذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة ٢س² + ٧س + ٣ك = ٠ يساوي مجموع جذري المعادلة س² - (ك + ٤) س = ٠ فإن ك تساوي ......

(١٢) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د(س) = م س² + ب س + حـ

فإن (ب + حـ) / م = ...

تكوين المعادلة التربيعية إذا علم جذراها

إذا كان ل ، م جذري المعادلة أ س² + ب س + جـ = ٠
فإن المعادلة التربيعية يمكن كتابتها على الصورة س² − (ل + م) س + ل م = ٠

أي أنه إذا علم جذري معادلة تربيعية ما فإننا يمكننا أن نكون هذه المعادلة من خلال العلاقة بين جذري المعادلة ل ، م ومعاملات حدود المعادلة المطلوبة وتكون المعادلة على الصورة
س² − (مجموع الجذرين) س + (حاصل ضرب الجذرين) = ٠
أو من خلال العلاقة :-
(س − ل)(س − م) = ٠

مثال

كون المعادلة التربيعية التي جذراها ٢ ، ٣

الحل

∵ الجذران هما ٢ ، ٣
∴ مجموع الجذرين = ٢ + ٣ = ٥
حاصل ضرب الجذرين = ٢ × ٣ = ٦
∴ المعادلة هي :-
س² − (مجموع الجذرين) س + (حاصل ضرب الجذرين) = ٠
∴ المعادلة هي
س² − ٥ س + ٦ = ٠

* حل آخر :-

∵ (س − ٢)(س − ٣) = ٠ ∴ س² − ٥ س + ٦ = ٠

مثال: كوِّن المعادلة التربيعية التي جذراها $1-3ت$ ، $1+3ت$

الحل

∵ مجموع الجذرين = $1-3ت + 1+3ت = 2$

حاصل ضرب الجذرين = $(1-3ت)(1+3ت) = 1+9 = 10$

∴ المعادلة هي:

$س^2 - 2س + 10 = 0$

مثال: إذا كان $\sqrt{3}ت$ ، $-\sqrt{3}ت$ جذرا المعادلة $س^2 + أس + ب = 0$ فإن أ + ب = ------

الحل

∵ مجموع الجذرين = صفر

حاصل ضرب الجذرين = 3

∴ المعادلة هي $س^2 + 3 = 0$

بمقارنة المعادلتين $س^2 + أس + ب = 0$

$س^2 + 3 = 0$ معاً

نجد أن أ = 0 ، ب = 3 ∴ أ+ب = 3

* تدريب

إذا كان 1 ، 3 جذرا المعادلة

$2س^2 + بس + أ = 0$

فإن أ + ب = ------

قواعد هامة

(١) $ل^{2} + م^{2} = (ل + م)^{2} - ٢ ل م$

(٢) $(ل - م)^{2} = (ل + م)^{2} - ٤ ل م$

(٣) $ل^{3} + م^{3} = (ل + م)\left[(ل + م)^{2} - ٣ ل م\right]$

(٤) $ل^{3} - م^{3} = (ل - م)\left[(ل + م)^{2} - ل م\right]$

(٥) $\frac{1}{م} + \frac{1}{ل} = \frac{ل + م}{ل م}$

(٦) $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^{2} + م^{2}}{ل م} = \frac{(ل + م)^{2} - ٢ ل م}{ل م}$

مثال

اذا كان ل ، م جذرا المعادلة $س^{2} + س + ١٠ = ٠$ أوجد قيمة

(١) $ل^{2} + م^{2}$ (٢) $ل - م$

الحل

$\because$ ل ، م جذرا المعادلة $س^{2} + س + ١٠ = ٠$

$\therefore ل + م = -١$ ، $ل م = ١٠$

(١) $\because ل^{2} + م^{2} = (ل + م)^{2} - ٢ ل م$

$= (-١)^{2} - ٢ \times ١٠$

$= ١ - ٢٠ = -١٩$

(٢) ∵ (ل − م)² = (ل + م)² − ٤ ل م

= (−١)² − ٤ × ١٠

∴ (ل − م)² = ١ − ٤٠ = −٣٩

∴ ل − م = ± √−٣٩ ∴ ل − م = ± √٣٩ ت

مثال

اذا كان ل ، م جذرا المعادلة

س² − ٧س − ٢ = ٠ أوجد قيمة $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م}$

الحل

∵ ل + م = ٧ ل م = −٢

∴ $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل + م}{ل م} = \frac{٧}{−٢} = \frac{−٧}{٢}$

مثال

اذا كان ل ، م جذرا المعادلة

س² − ٥س + ٧ = ٠ فإن

(١) ل² − ٥ل = ...

(٢) م² − ٥م + ٣ = ...

الحل

∵ ل ، م جذرا المعادلة س² − ٥س + ٧ = ٠

∴ ل ، م تحققان المعادلة

∴ ل² − ٥ل + ٧ = ٠ ومنها ل² − ٥ل = −٧

(٢) ∵ م تحقق المعادلة

∴ م² − ٥م + ٧ = ٠ ومنها م² − ٥م + ٣ = −٤

أ/ علي حمدون

تكوين معادلة تربيعية من معادلة أخرى

مثال

اذا كان ل ، م جذرا المعادلة
$س^2 + 3س - 5 = 0$ ، كون المعادلة التي جذراها $ل^2$ ، $م^2$

الحل

∵ ل ، م جذرا المعادلة $س^2 + 3س - 5 = 0$
∴ $ل + م = \frac{-3}{1} = -3$ ، $ل م = \frac{-5}{1} = -5$

∵ جذرا المعادلة المطلوبة هما $ل^2$ ، $م^2$
∴ مجموع جذري المعادلة المطلوبة $= ل^2 + م^2$
$= (ل + م)^2 - 2 ل م$
$= (-3)^2 - 2 \times (-5)$
$= 9 + 10 = 19$ ← (1)

∵ حاصل ضرب جذري المعادلة المطلوبة $= ل^2 م^2$
$= (ل م)^2$
$= (-5)^2 = 25$ ← (2)

من (1) ، (2) ينتج أن المعادلة المطلوبة هي :
$س^2 - (ل^2 + م^2) س + (ل^2 م^2) = 0$
∴ $س^2 - 19 س + 25 = 0$

مثال

اذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة
$2س^2 - 3س - 1 = 0$ كون المعادلة التربيعية التي
جذراها $\frac{1}{ل}$ ، $\frac{1}{م}$

الحل

∵ ل ، م جذرا المعادلة $٢س^{٢} - ٣س - ١ = ٠$

∴ $ل + م = \frac{-ب}{أ} = \frac{٣}{٢}$ ، $ل م = \frac{جـ}{أ} = \frac{-١}{٢}$

∵ مجموع جذري المعادلة المطلوبة $= \frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل + م}{ل م}$

$= \frac{٣}{٢} \div \frac{-١}{٢} = \frac{٣}{٢} \times \frac{-٢}{١}$

∴ مجموع جذري المعادلة المطلوبة $= -٣$ ← (١)

∵ حاصل ضرب جذري المعادلة المطلوبة $= \frac{١}{ل} \times \frac{١}{م} = \frac{١}{ل م}$

$= -٢$

∴ المعادلة المطلوبة هي :

س^{٢} − (مجموع الجذرين) س + (حاصل ضرب الجذرين) = ٠

∴ $س^{٢} + ٣س - ٢ = ٠$

مثال

كون المعادلة التربيعية التي جذراها ضعف جذري المعادلة $٢س^{٢} - ٨س + ٥ = ٠$

الحل

بفرض أن جذرا المعادلة $٢س^{٢} - ٨س + ٥ = ٠$ هما ل ، م

∴ $ل + م = \frac{٨}{٢} = ٤$ ، $ل م = \frac{٥}{٢}$

∵ ل ، م جذرا المعادلة المعلومة $٢س^{٢} - ٨س + ٥ = ٠$

∴ جذرا المعادلة المطلوبة هما ٢ل ، ٢م

∴ مجموع الجذرين للمعادلة المطلوبة $= ٢ل + ٢م = ٢(ل + م)$

$= ٢ \times ٤ = ٨$ ← (١)

∴ حاصل ضرب الجذرين للمعادلة المطلوبة = $٢ل \times ٢م$

$= ٤ ل م$

$= ٤ \times \frac{٥}{٢} = ١٠$ ← (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن المعادلة المطلوبة هي:

$س^{٢} - ٨س + ١٠ = ٠$

مثال

إذا كان ل+١ ، م+١ هما جذرا المعادلة $س^{٢} + ٥س + ٣ = ٠$ فأوجد المعادلة التربيعية التي جذراها ل ، م

الحل

∵ ل+١ ، م+١ جذرا المعادلة $س^{٢} + ٥س + ٣ = ٠$

∴ $ل+١ + م+١ = \frac{-ب}{أ} = \frac{-٥}{١} = -٥$

∴ $ل + م + ٢ = ٥$ ومنها $ل + م = ٣$ ← (١)

∵ $(ل+١) \times (م+١) = \frac{جـ}{أ} = \frac{٣}{١} = ٣$

∴ $ل م + ل + م + ١ = ٣$ ∴ $ل م + ٣ + ١ = ٣$

∴ $ل م = -١$ ← (٢)

∵ المعادلة المطلوبة جذراها ل ، م ∴ المعادلة هي

$س^{٢} - (ل + م) س + (ل م) = ٠$

∴ $س^{٢} - ٣س - ١ = ٠$

* تدريب:

إذا كان ل ، م جذرا المعادلة $٢س^{٢} - ٣س - ١ = ٠$

كوّن المعادلة التي جذراها ل+م ، ل م

مثاله أكمل ما يأتي

(١) اذا كان $٢-ت$ هو أحد جذري المعادلة $ت س^٢ - ٢(ت+١) س + (٢-ت) = ٠$ فإن الجذر الآخر يساوي ------

(٢) اذا كان $ل$ ، $\frac{٢}{ل}$ هما جذرا المعادلة $م س^٢ + ب س + ١٢ = ٠$ فإن $م = $ ------

(٣) اذا كان جذري المعادلة $س^٢ + ٢س + ٣ = ٠$ هما ل ، م فإن $ل^٢ + م^٢ - ٣ ل م = $ ------

الحل

(١) بفرض أن جذري المعادلة هما $٢-ت$ ، ل

∵ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{ح}{م} = \frac{٢-ت}{ت}$

∴ $ل \times (٢-ت) = \frac{٢-ت}{ت}$ منها $ل = \frac{١}{ت} = -ت$

∴ الجذر الآخر يساوي $-ت$

(٢) ∵ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{ح}{م}$

∴ $ل \times \frac{٢}{ل} = \frac{١٢}{م}$ منها $م = ٦$

(٣) ∵ $ل+م = \frac{-٢}{١} = -٢$ ، $ل م = \frac{٣}{١} = ٣$

∴ المقدار $ل^٢ + م^٢ - ٣ ل م = (ل+م)^٢ - ٢ ل م - ٣ ل م$

$= (ل+م)^٢ - ٥ ل م$

$= ٤ - ٥ \times ٣ = -١١$

أ/ علي حمدون

تمارين

(١) اذا كان ل ، م جذرا المعادلة $س^٢ - ٥س + ٩ = ٠$

كون المعادلة التي جذراها ل - ٢ ، م - ٢

(٢) اذا كان ل ، م جذرا المعادلة $س^٢ - ٥س + ٧ = ٠$

كون المعادلة التي جذراها

أ- $ل^٢$ ، $م^٢$ ب- $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

ج- $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

(٣) ابسط صورة للمعادلة التربيعية التي مجموع جذراها ٣ وحاصل ضربهما $\frac{٥}{٤}$ هي ......

(٤) المعادلة التربيعية التي جذراها $١ - \sqrt{٣}$ ، $١ + \sqrt{٣}$ ابسط صورة لها هي ......

(٥) القيمة المطلقة للفرق بين جذري المعادلة $س^٢ - ٤س + ٢ = ٠$ تساوي ......

(٦) اذا كان ل ، م جذرا المعادلة $س^٢ - ٤س + ٥ = ٠$ فإن المعادلة التي جذراها $ل^٢ - ٤م - ٥$ هي ......

(٧) حاصل ضرب جذور المعادلتين $٢س^٢ + ب س + ج = ٠$ ، $س^٢ + ل س + م = ٠$ هو ......

أ/ علي حمدون

تمارين عامة

(١) مجموعة حل المعادلة $س^٢ - ٣س + ٩ = ٠$ في ع تساوي ....

(٢) مجموعة حل المعادلة $(س - ١)^٢ = ص - ١$ في ع تساوي ......

(٣) المعادلة التربيعية التي جذراها ٢ ، -٥ ابسط صورة لها هي ......

(٤) اذا كان ٢ ، ٣ جذرا المعادلة $س^٢ + م س + ن = ٠$ فان $م \times ن =$ ......

(٥) اذا كان س = -١ أحد جذري المعادلة $س^٢ - م س - ٢ = ٠$ فان الجذر الاخر هو ......

(٦) اذا كان ل ، م جذرا المعادلة $س^٢ - ٢س + ٥ = ٠$ فان $ل^٢ - ٢ل + ١٠ =$ ......
$م^٢ - ٢م - ١٠ =$ ......

(٧) ابسط صورة للمقدار $(١ - ت)^٤$ تساوي ......

(٨) ابسط صورة للمقدار $(١ + \sqrt{-١})^٨$ تساوي ......

(٩) المعكوس الجمعي للعدد ت هو ...... ومعكوسه الضربي هو ......

(١٠) مرافق العدد ٢ت - ١ هو ------

(١١) مرافق العدد ٤ت^{٦} - ٣ت^{٣} هو ------

(١٢) مرافق العدد ٥ت^{١٤} هو ------

(١٣) اذا كانت أ، ب، جـ، ء اربعة اعداد زوجية متتالية فان

ت^{أ} + ت^{ب} + ت^{جـ} + ت^{ء} = ------

(١٤) اذا كانت أ، ب، جـ، ء اربعة اعداد فردية متتالية فان

ت^{أ} + ت^{ب} + ت^{جـ} + ت^{ء} = ------

(١٥) المقدار ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ... + ت^{١٠٥} = ------

بحث إشارة الدالة

* المقصود ببحث إشارة الدالة هو تحديد قيم س التي تكون عندها الدالة موجبة أي أن د(س) > ٠ أو سالبة أي أن د(س) < ٠ أو تساوي صفراً أي أن د(س) = ٠

إشارة الدالة الثابتة

الصورة العامة للدالة الثابتة :

د(س) = حـ حيث حـ ∈ ح *

وتكون إشارة الدالة الثابتة هي نفس إشارة جـ

مثال

ابحث إشارة الدوال الآتية

(١) د(س) = ٣   د(س) = −١

الحل

(١) ∵ د(س) = ٣ دالة ثابتة

∴ إشارة الدالة د موجبة لجميع قيم س ∈ ح

(٢) ∵ د(س) = −١ دالة ثابتة

∴ إشارة الدالة د سالبة لجميع قيم س ∈ ح

* تدريب :

ابحث إشارة الدالة د(س) = ٧

إشارة الدالة الخطية

الصورة العامة للدالة الخطية (دالة الدرجة الأولى) هي:

$د(س) = ب س + ح$ حيث ب، ح ∈ ح ، ب ≠ ٠

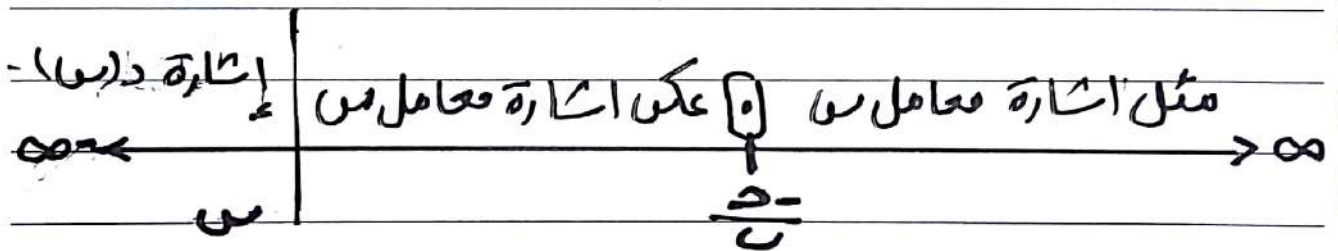
لبحث اشارة الدالة الخطية $د(س) = ب س + ح$

نضع $د(س) = ٠$ ∴ $ب س + ح = ٠$ ومنها $س = \frac{-ح}{ب}$

وتكون اشارة الدالة على النحو التالي

(١) $د(س) = ٠$ عندما $س = \frac{-ح}{ب}$

(٢) اشارة الدالة د(س) تكون مثل اشارة (ب) معامل س عندما $س > \frac{-ح}{ب}$

(٣) اشارة الدالة د(س) تكون عكس إشارة (ب) معامل س عندما $س < \frac{-ح}{ب}$

إشارة د(س)	عكس اشارة معامل س	٠	مثل اشارة معامل س
س $-\infty$		$\frac{-ح}{ب}$	∞

مثال

إبحث اشارة الدوال الآتية

(١) $د(س) = س - ٣$

(٢) $د(س) = ٥ - ٢س$

(٣) $د(س) = س + ٤$ على الفترة $[-٦ ، ٣]$

الحل

(١) ∵ د(س) = س − ٣

∴ نضع د(س) = ٠ ∴ س − ٣ = ٠ ∴ س = ٣

∴ د(س) = ٠ عندما س = ٣

د(س) > ٠ موجبة عندما س > ٣

د(س) < ٠ سالبة عندما س < ٣

(٢) ∵ د(س) = ٥ − ٢س ∴ بوضع ٥ − ٢س = ٠ ∴ س = $\frac{٥}{٢}$

∴ د(س) = ٠ عندما س = $\frac{٥}{٢}$

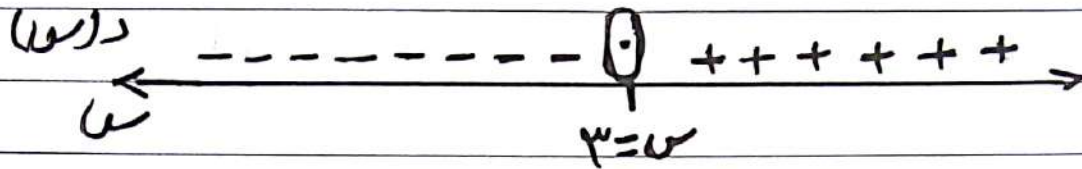
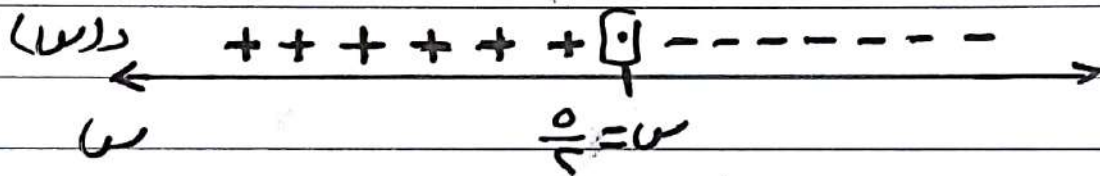
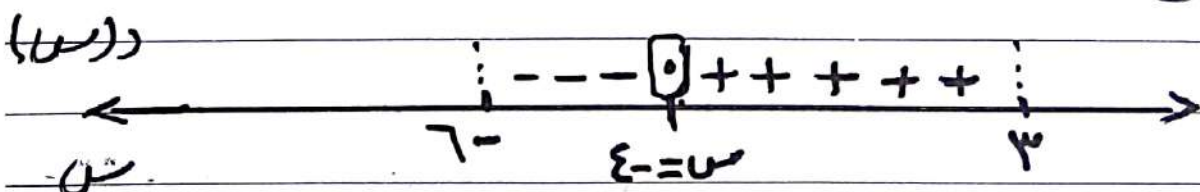
د(س) < ٠ سالبة عندما س > $\frac{٥}{٢}$

د(س) > ٠ موجبة عندما س < $\frac{٥}{٢}$

(٣) ∵ د(س) = س + ٤ حيث س ∈ [−٦، ٣]

بوضع س + ٤ = ٠ ∴ س = −٤

∴ د(س) = ٠ عندما س = −٤

د(س) > ٠ موجبة عندما س ∈]−٤، ٣]

د(س) < ٠ سالبة عندما س ∈ [−٦، −٤[

إشارة الدالة التربيعية

* الصورة العامة للدالة التربيعية هي :-
د(س) = م س² + ب س + حـ

ولبحث إشارة الدالة التربيعية نضع د(س) = ٠
∴ م س² + ب س + حـ = ٠ وهناك عدة حالات :-

*أولاً :- إذا كان المميز (ب² - ٤ م حـ) < صفر
فإن إشارة الدالة تكون مثل إشارة معامل س² لجميع قيم س التي تنتمي إلى مجال الدالة

مثال ابحث إشارة الدوال الآتية
(١) د(س) = س² + ١ (٢) د(س) = - س² - ٢ س - ٥

الحل

(١) ∵ د(س) = س² + ١ بوضع د(س) = ٠
∴ س² + ١ = ٠ ∴ س² = -١
∴ المعادلة ليس لها حل في ح ∴ المميز < صفر
∴ إشارة د(س) موجبة لكل س ∈ المجال ح

(٢) ∵ المميز = ب² - ٤ م حـ ∴ المميز = ٤ - ٤ × -١ × -٥
∴ المميز = ٤ - ٢٠ = -١٦ < ٠
∴ د(س) < ٠ سالبة (مثل معامل س²) لكل س ∈ ح

* ثانياً إذا كان المميز ($ب^2 - 4أجـ$) = صفر

يكون للمعادلة د(س) = ٠ جذران حقيقيان متساويان
ويفرض أن الجذران هما ل ، ل
أي أن د(س) = ٠ عندما س = ل
فتكون إشارة الدالة على النحو التالي
(١) د(س) = ٠ عندما س = ل
(٢) د(س) لها نفس إشارة (أ) معامل $س^2$ لكل س ≠ ل
أي أن د(س) لها نفس إشارة معامل $س^2$ لكل س ∈ ح - {ل}

مثال

(١) ابحث إشارة الدالة د(س) = $س^2$ - ٢س + ١

(٢) ابحث إشارة الدالة د(س) = $(س + ٣)^2$

(٣) ابحث إشارة الدالة د(س) = $(٣ - س)^2$

الحل

(١) ∵ د(س) = $س^2$ - ٢س + ١
نضع د(س) = ٠ ∴ $س^2$ - ٢س + ١ = ٠
∴ (س - ١)(س - ١) = ٠ منها س = ١ ، س = ١
∴ د(س) = ٠ عند س = ١ والمميز = صفر

د(س) + + + + + + + + + + + ٠ + + + + + + + + +
س ————————— س = ١ —————————

(١) ∴ د(س) = ٠ عندما س = ١
(٢) د(س) > ٠ موجبة عندما س ∈ ح - {١}

(٢) ∵ د(س) = (س + ٣)^{٢} ⟵ (مقدار مربع)

∴ د(س) = ٠ عندما س = −٣

د(س) > ٠ موجبة عندما س ∈ ح − {−٣}

(٣) ∵ د(س) = (٣ − س)^{٢} ⟵ (مقدار مربع)

∴ د(س) = ٠ عندما س = ٣

د(س) > ٠ موجبة عندما س ∈ ح − {٣}

مثال

ابحث إشارة الدالة د(س) = −س^{٢} + ٤س − ٤

الحل

∵ د(س) = −س^{٢} + ٤س − ٤

نضع د(س) = ٠ ∴ −س^{٢} + ٤س − ٤ = ٠ بالضرب × −١

∴ س^{٢} − ٤س + ٤ = ٠ ∴ (س − ٢)(س − ٢) = ٠

∴ س = ٢ جذران حقيقيان متساويان ∵ المميز = ٠

(١) ∴ د(س) = ٠ عندما س = ٢

(٢) د(س) < ٠ سالبة عندما س ∈ ح − {٢}

* تدريب :

ابحث إشارة الدوال الآتية

(١) د(س) = س^{٢} − س + ٥

(٢) د(س) = ٣ − ٤س − ٤س^{٢}

(٣) د(س) = س^{٢} − ٦س + ٩

* ثالثاً: إذا كان المميز $(ب^2 - 4 أ جـ) > 0$

يكون للمعادلة $د(س) = 0$ جذران حقيقيان مختلفان
فإذا كان $ل ، م$ جذرا المعادلة حيث $ل > م$ فإن:

د(س)	مثل إشارة معامل $س^2$	م	عكس إشارة معامل $س^2$	ل	مثل إشارة معامل $س^2$
س		م		ل	

مثال

ابحث إشارة الدوال الآتية:
(1) $د(س) = س^2 - 5س + 4$
(2) $د(س) = 10 + 3س - س^2$
(3) $د(س) = س^2 - 6س + 8$ على الفترة $[-1 ، 7]$

الحل

(1) ∵ $د(س) = س^2 - 5س + 4$ بوضع $د(س) = 0$
∴ $س^2 - 5س + 4 = 0$ ، ومنها $(س - 4)(س - 1) = 0$
∴ $س = 4$ ، $س = 1$ ∴ م.ح = $\{1 ، 4\}$

د(س) + + + + + (0) - - - - - - - - (0) + + + + +
س $س = 1$ $س = 4$

(1) ∴ $د(س) = 0$ عندما $س \in \{1 ، 4\}$
(2) $د(س) < 0$ سالبة عندما $س \in]1 ، 4[$
(3) $د(س) > 0$ موجبة عندما $س \in ح - [1 ، 4]$

(٢) ∵ د(س) = ١٠ + ٣س − س² ، بوضع د(س) = ٠

∴ ١٠ + ٣س − س² = ٠ بالضرب × −١ ثم ترتيب الحدود

∴ س² − ٣س − ١٠ = ٠ ∴ (س − ٥)(س + ٢) = ٠

∴ س = ٥ ، س = −٢ ∴ م.ح = {−٢ ، ٥}

∴ د(س) = ٠ عندما س ∈ {−٢ ، ٥}

د(س) > ٠ موجبة عندما س ∈]−٢ ، ٥[

د(س) < ٠ سالبة عندما س ∈ ح − [−٢ ، ٥]

(٣) ∵ د(س) = س² − ٦س + ٨ حيث س ∈ [−١ ، ٧]

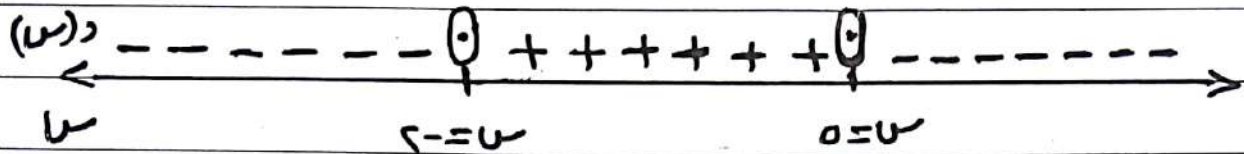
بوضع د(س) = ٠ ∴ س² − ٦س + ٨ = ٠

∴ (س − ٤)(س − ٢) = ٠ ∴ س = ٢ ، س = ٤

∴ م.ح = {٢ ، ٤}

∴ د(س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٤}

د(س) < ٠ سالبة عندما س ∈]٢ ، ٤[

د(س) > ٠ موجبة عندما س ∈ [−١ ، ٢[∪]٤ ، ٧]

* تدريب :

اذا كان ل جذراً للمعادلة أس + ب = ٠ حيث أ > ٠

فإن ل + ١ يكون .... بينما ل − ١ يكون ....

(أ) أكبر من الصفر (ب) يساوي الصفر (جـ) أصغر من الصفر

مثال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{2} - ٢س - ٣

ومن الرسم أجب عن الأسئلة الآتية

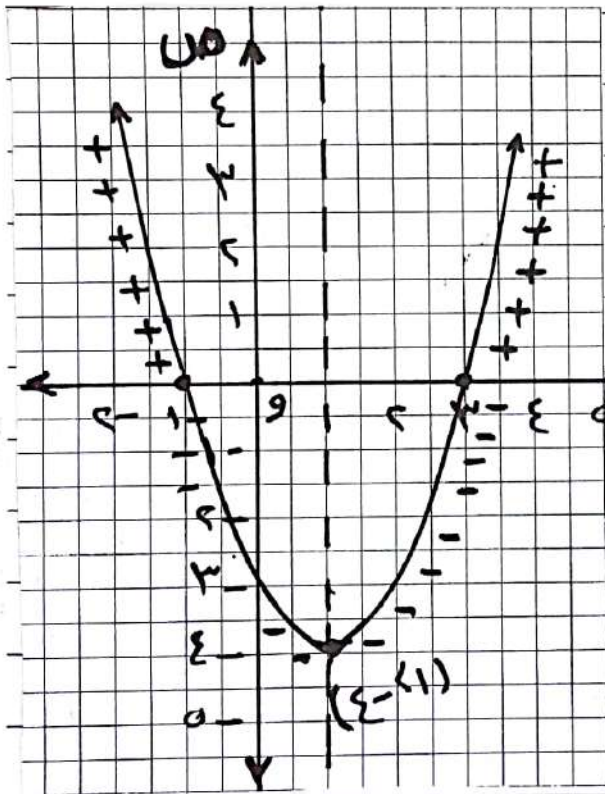
(١) أوجد نقطة رأس المنحنى

(٢) أوجد معادلة محور تماثل الدالة والقيمة الصغرى لها

(٣) عين مدى الدالة

(٤) من خلال الرسم عين إشارة د(س)

الحل

(س) الرأس المنحنى = $\frac{٢}{٢ \times ١}$ = ١

س	س^{2} - ٢س - ٣	ص
-٢	٤ + ٤ - ٣	٥
-١	١ + ٢ - ٣	٠
٠	٠ + ٠ - ٣	-٣
١	١ - ٢ - ٣	-٤
٢	٤ - ٤ - ٣	-٣
٣	٩ - ٦ - ٣	٠
٤	١٦ - ٨ - ٣	٥

(١) نقطة رأس المنحنى = (١، -٤)

(٢) معادلة محور التماثل هي المستقيم س = ١ والقيمة الصغرى للدالة = -٤

(٣) مدى الدالة = [-٤، ∞[

(٤) د(س) = ٠ عندما س ∈ {-١، ٣}

د(س) < ٠ سالبة في الفترة]-١، ٣[

د(س) > ٠ موجبة في الفترة ح - [-١، ٣]

مثال

(١) الشرط الذي يجعل الدالة د(س) = أ س٢ + ب س + حـ لها اشارة واحدة على ح هو ....

(٢) اذا كانت د(س) = أ س٢ + ب س + حـ حيث أ < ٠ وكان جذرا المعادلة د(س) = ٠ هما ٢ ، -٥ فان الدالة د(س) تكون موجبة في الفترة ......

(٣) اذا كانت د(س) = أ س + ب وكان س = ل جذراً للمعادلة د(س) = ٠ فان د(ل+١) × د(ل-١) ∈ ......

(أ) ح+ (ب) ح- (جـ) [-١ ، ١] (د) [-٥ ، ٥]

الحل

(١) الشرط اللازم والضروري لكي يكون للدالة د(س) = أ س٢ + ب س + حـ اشارة واحدة هو المميز < صفر ∴ ب٢ - ٤ أ حـ < صفر

(٢)

د(س) - - - - - - - ○ + + + + ○ - - - - - -

س -٥ ٢

د(س) > ٠ موجبة في الفترة]-٥ ، ٢[

(٣) ∵ ل جذراً للمعادلة د(س) = ٠ حيث د(س) دالة خطية ∴ د(ل+١) ، د(ل-١) مختلفي الإشارة

∴ د(ل+١) × د(ل-١) < صفر

∴ د(ل+١) × د(ل-١) ∈ ح-

تمارين

١) ابحث اشارة الدوال الآتية

أ) د(س) = ٢ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) د(س) = ٣ س

جـ) د(س) = −(س−٢)(س+٢)

د) د(س) = ٩ − ٤ س²

٢) إختار الإجابة الصحيحة :

① د(س) = −٣ تكون سالبة فى الفترة

أ]−∞، ٣[‏ ‏ ب]−∞، ∞[‏ ‏ جـ [−٣، ٣] ‏ ‏ د غير ذلك

② الدالة د(س) = س² − ٤ سالبة لكل س ∈ ---

أ ح −]−٢، ٢[‏ ‏ ب ح − [−٢، ٢]

جـ]−٢، ٢[‏ ‏ د [−٢، ٢]

③ اذا كانت د(س) = س − أ فإن د(أ+١) × د(أ−١) ∈ ---

أ ح⁺ ‏ ‏ ب ح⁻ ‏ ‏ جـ [−١، ١] ‏ ‏ د]−١، ١[

④ اذا كانت د(س) = أس² + ب س + جـ حيث أ < ٠، وكان −٢، ١ جذرا المعادلة د(س) = ٠ فإن الدالة د(س) تكون موجبة عندما س ∈ ---

أ {−٢، ١} ‏ ‏ ب [−٢، ١] ‏ ‏ جـ]−٢، ١[‏ ‏ د ح − [−٢، ١]

⑤ اذا كانت القيمة الصغرى للدالة التربيعية د(س) تساوى ٤ فإن اشارة د(س) تكون ---

أ موجبة ‏ ‏ ب سالبة ‏ ‏ جـ صفر ‏ ‏ د غير ذلك

(٦) اذا كان ل ، م جذرا المعادلة د(س) = ٠ حيث د دالة تربيعية ، ل > م فإن د(ل+١) × د(م-١) ∋ ......

ⓐ]٠ ، ∞[ⓑ]-∞ ، ٠[ⓒ [٠ ، ∞[ⓓ صفر

(٧) الدالة د(س) = { س + ٢ ، س ≥ -٢ ؛ -س - ٢ ، س < -٢ }

تكون سالبة في ......

ⓐ]-٢ ، ∞[ⓑ]-∞ ، -٢[ⓒ ح - {-٢} ⓓ غير ذلك

(٨) اذا كان منحنى الدالة الخطية د(س) يقطع محور السينات عند النقطة (٣ ، ٠) فأي العبارات الاتية يكون صحيحا" دائما"

ⓐ د(٢) < د(٣) ⓑ د(١) د(٤) > د(٣)

ⓒ د(٢) × د(٤) > د(٣) ⓓ د(٢) × د(٤) > د(٣)

(٩) أثبت أنه لجميع قيم ك ∋ ح يكون جذرا المعادلة ٢س^{2} - ك س + ك - ٣ = ٠ حقيقين مختلفين

(١٠) اذا كانت د(س) = س - ١

ر(س) = س^{2} + س - ٦

أوجد الفترة التي تكون فيها الدالتين د ، ر موجبتين معا" وكذلك الفترة التي تكون فيها الدالتين د ، ر سالبتين معا"

حل متباينة الدرجة الثانية في متغير واحد

* لحل متباينة الدرجة الثانية في متغير واحد
(١) نجعل كل حدود المتباينة في طرف والطرف الآخر صفراً
(٢) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة ثم نبحث اشارة هذه الدالة
(٣) نحدد مجموعة حل المتباينة

مثال

أوجد مجموعة حل المتباينة $س^٢ - ٦ > ٥ س$

الحل

∵ $س^٢ - ٥ س - ٦ > ٠$

بفرض أن $س^٢ - ٥ س - ٦ = ٠$ ∴ $(س - ٦)(س + ١) = ٠$

∴ $س = ٦$ ، $س = -١$

د(س) + + + + + + ⓪ - - - - - - - - ⓪ + + + +

س ← -١ ، ٦

∴ م . ح = ح - [-١ ، ٦]

مثال

أوجد مجموعة حل المتباينة $٤ - س^٢ \leq ٠$

الحل

نضع $٤ - س^٢ = ٠$ ∴ $س = \pm ٢$

د(س) - - - - - ⓪ + + + + ⓪ - - - - - -

س ← -٢ ، ٢

∴ م . ح = ح -]-٢ ، ٢[

مثال: أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية

(١) س^٢ − ٤س + ٤ ≤ ٠ (٢) (س − ٢)^٢ > −٥

(٣) (س + ٣)^٢ < ١٠ − ٣(س + ٣)

الحل

(١) نضع س^٢ − ٤س + ٤ = ٠ ∴ (س − ٢)(س − ٢) = ٠

∴ س = ٢ ، س = ٢

∴ م.ح = ح

(٢) ∵ (س − ٢)^٢ = { صفر عندما س = ٢ ؛ موجب عندما س ≠ ٢

∴ (س − ٢)^٢ ≥ ٠ لكل س ∈ ح

∴ م.ح = ∅

(٣) ∵ (س + ٣)^٢ < ١٠ − ٣(س + ٣) نبسط المتباينة

∴ س^٢ + ٦س + ٩ < ١٠ − ٣س − ٩

∴ س^٢ + ٩س + ٨ < ٠

∴ نضع س^٢ + ٩س + ٨ = ٠ ∴ (س + ٨)(س + ١) = ٠

∴ س = −٨ ، س = −١

∴ م.ح =]−٨ ، −١[

مثال أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية

(1) (س − ٣)(٢ − س) < ٠

(2) − س (س − ٤) ≤ ٠

الحل

(1) ∵ (س − ٣)(٢ − س) < ٠

∴ نضع (س − ٣)(٢ − س) = ٠ منها س = ٣ ، س = ٢

∵ معامل س² سالب

∴ م.ح = ح − [٢، ٣]

(2) ∵ − س (س − ٤) ≤ ٠

∴ نضع − س (س − ٤) = ٠ منها س = ٠ ، س = ٤

∵ معامل س² سالب

∴ م.ح = [٠، ٤]

* تدريب :
الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د(س) = س² − ٣س فإن مجموعة حل المتباينة س² − ٣س ≤ ٠ تساوي ....

تمارين

أوجد مجموعة حل المتباينات الآتية

(١) ٧ + س² − ٤ س < ٠

(٢) ٢ س − س² < ٠

(٣) س² ≤ ٩

(٤) ٣ − ٢ س ≥ س²

* أكمل ما يأتي :

(١) مجموعة حل المتباينة (س − ٢)(س − ٤) في ح هي ....

(٢) مجموعة حل المتباينة س² + ٤ < ٠ في ح هي ....

(٣) مجموعة حل المتباينة س² + ٥ < ٠ في ح هي ....

(٤) مجموعة حل المتباينة (س − ١)(٢ − س) ≤ ٠ في ح هي ....

(٥) مجموعة حل المتباينة (س + ٥)(س − ١) ≤ (س + ٥) هي ....

(٦) إذا كانت مجموعة حل المتباينة س² − ١ ≥ ٢ س + ك هي [−٢ ، ٤] فإن ك = ...

(٧) إذا كان ب² − ٤ أ جـ < ٠ ، فإن مجموعة حل المتباينة أ س² + ب س + جـ < ٠ ، حيث أ < ٠ ، هي ....

الشرح الوافى

حساب مثلثات

الصف الاول الثانوى

ترم اول

اعداد الاستاذ / على حمدون
معلم اول (أ)بمعهد بنى عدى
الثانوى بنين

الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى

* الزاوية الموجهة :-

هى زوج مرتب مكون من شعاعين لهما نفس نقطة البداية .

تسمى نقطة البداية برأس الزاوية الموجهة

مثل الزاوية الموجهة

(أ و ب) = (و أ→ ، و ب→)

يسمى و أ→ بالضلع الابتدائى ، و ب→ بالضلع النهائى

وعند رسم الزاوية الموجهة لابد من رسم سهم يخرج من الضلع الابتدائى متجهاً نحو الضلع النهائى

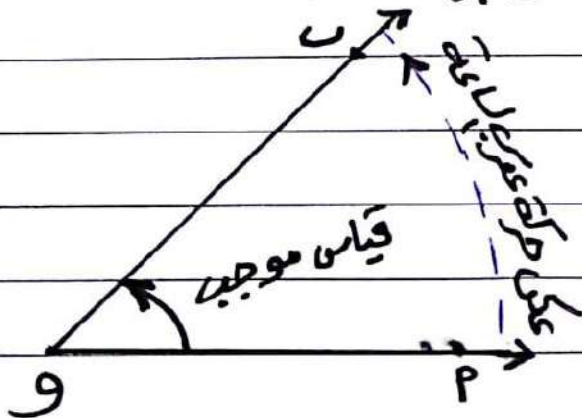
* تدريب :-

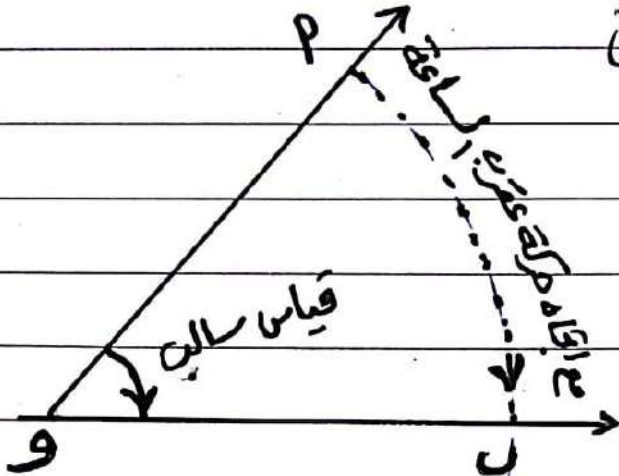
هل < أ و ب الموجهة = < ب و أ الموجهة

علل لما تقول

القياس الموجب والقياس السالب للزاوية

* القياس الموجب للزاوية الموجهة :-

إذا كان اتجاه الضلع النهائى للزاوية الموجهة فى عكس اتجاه حركة عقرب الساعة كما موضح بالرسم

* القياس السالب للزاوية الموجهة :-

إذا كان اتجاه الضلع النهائي في نفس اتجاه حركة عقرب الساعة كما موضح بالرسم

ملاحظة هامة

لكل زاوية موجهة قياسان أحدهما موجب والآخر سالب بحيث يكون مجموع القيمتين المطلقتين للقياسين يساوي ٣٦٠° وعلى ذلك يكون

(١) القياس السالب لزاوية موجهة = قياسها الموجب − ٣٦٠°

(٢) القياس الموجب لزاوية موجهة = قياسها السالب + ٣٦٠°

مثال

(١) القياس السالب لزاوية موجهة قياسها ١٢٠° يساوي ....

(٢) القياس الموجب لزاوية موجهة قياسها −٣٠٠ يساوي ....

الحل

(١) ∵ θ = ١٢٠° ∴ القياس السالب = θ − ٣٦٠°

= ١٢٠° − ٣٦٠° = −٢٤٠°

(٢) ∵ θ = −٣٠٠° ∴ القياس الموجب = −٣٠٠ + ٣٦٠°

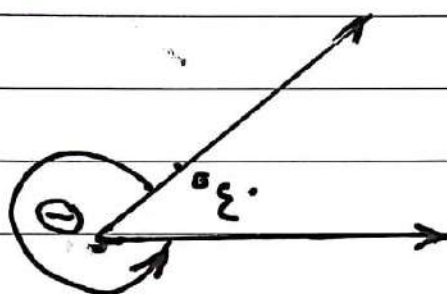
= ٦٠°

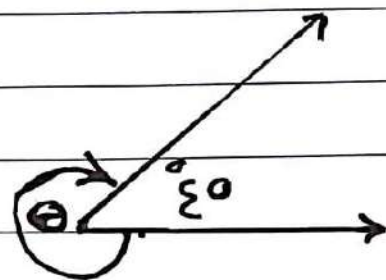
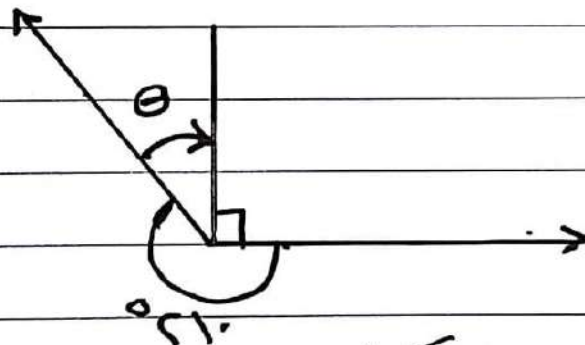
* تدريب

(١) القياس الموجب لزاوية موجهة قياسها −٥٠° يساوي ......

(٢) القياس السالب لزاوية موجهة قياسها ٢٥٠° يساوي ......

مثال

اوجد قياس الزاوية θ في كل من الاشكال الاتية

شكل (١)

شكل (٢)

شكل (٣)

الحل

(١) المطلوب القياس السالب للزاوية θ

∴ θ = ٤٥° − ٣٦٠° = −٣١٥°

(٢) المطلوب القياس الموجب للزاوية θ ∴ θ = −٤٠ + ٣٦٠° = ٣٢٠°

(٣) المطلوب القياس السالب للزاوية θ

∴ θ = (٩٠ + ٢١٠°) − ٣٦٠° = −٦٠°

الزاوية الموجهة في الوضع القياسي

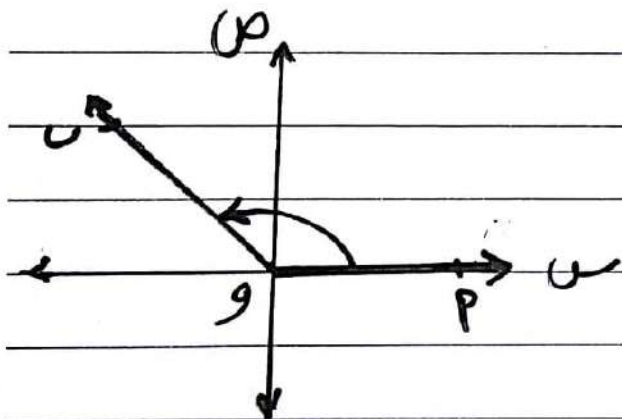
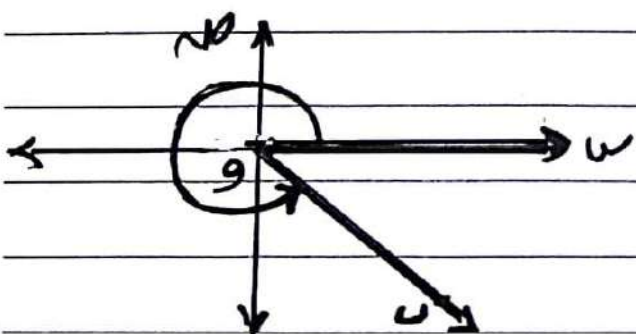
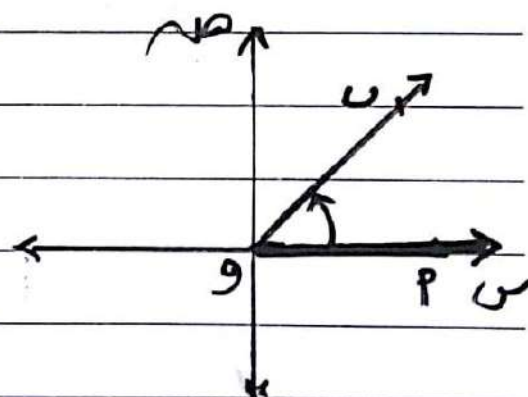
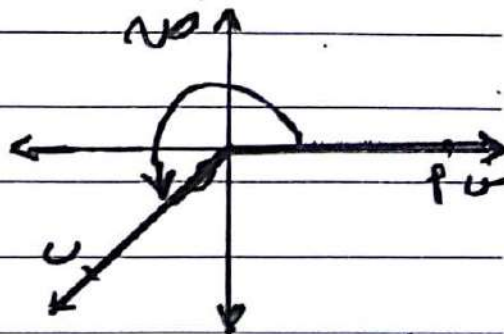
يقال أن الزاوية الموجهة في الوضع القياسي اذا تحقق شرطان معاً :-

١- ان تكون رأس الزاوية هي نقطة الاصل

٢- ان يكون ضلعها الابتدائي منطبقاً على الجزء الموجب لمحور السينات

اي ان يقع ضلعها الابتدائي على $\overrightarrow{وس}$

* تحديد موقع الزاوية الموجهة التي في الوضع القياسي في المستوى الاحداثي المتعامد من خلال موقع ضلعها النهائي

* الاشكال الاتية تحدد موقع الزاوية الموجهة في الوضع القياسي

الزوايا المتكافئة في الوضع القياسي

يقال لعدة زوايا موجهة في الوضع القياسي أنها متكافئة اذا كان لهم جميعاً نفس الضلع النهائي

* اذا كان θ هو قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي فان الزوايا التي قياسها (θ ± ن × ٣٦٠) حيث ن عدد صحيح يكون لها جميعاً نفس الضلع النهائي وبالتالي فهي زوايا متكافئة

مثال

أوجد ثلاثة زوايا موجبة تكافئ كل منها زاوية قياسها ١٠٠°

الحل

∴ الزوايا الموجبة التي تكافئ الزاوية التي قياسها ١٠٠° هي

١٠٠ + ٣٦٠° ، ١٠٠° + ٢ × ٣٦٠° ، ١٠٠ + ٣ × ٣٦٠°

∴ الزوايا المتكافئة هي ٤٦٠° ، ٨٢٠° ، ١١٨٠°

مثال

أوجد ثلاثة زوايا سالبة تكافئ كل منها زاوية قياسها ٢٠٠°

الحل

الزوايا السالبة التي تكافئ كل منها الزاوية التي قياسها ٢٠٠° هي

٢٠٠ − ٣٦٠° ، ٢٠٠ − ٢ × ٣٦٠° ، ٢٠٠ − ٣ × ٣٦٠°

∴ الزوايا المتكافئة هي −١٦٠° ، −٥٢٠° ، −٨٨٠°

ملاحظات هامة

(١) لكل زاوية موجهة في الوضع القياسي عدد لا نهائي من الزوايا المكافئة لها

(٢) أصغر قياس موجب لزاوية موجهة سالبة ∈]٠ ، ٣٦٠°[
وللحصول عليه نضيف إلى القياس السالب للزاوية دورة كاملة أو عدد من الدورات

(٣) أكبر قياس سالب لزاوية موجهة موجبة ∈]-٣٦٠° ، ٠[
وللحصول عليه نطرح من القياس الموجب دورة كاملة او عدد من الدورات

(٤) لتعيين موقع زاوية موجهة في الوضع القياسي لابد من ايجاد أصغر قياس موجب لها اولاً ثم تعيين موقعها ثانياً

(٥) إذا وقع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي على أحد المحاور فإنها تسمى زاوية ربعية

مثال

أوجد أصغر قياس موجب للزوايا التي قياسها الآتي ومن ثم عين موقع هذه الزوايا

(١) -٧٠° (٢) ٥٠٠° (٣) -٦٣٠

الحل

(١) أصغر قياس موجب للزاوية -٧٠ = -٧٠° + ٣٦٠° = ٢٩٠°
∴ الزاوية تقع في الربع الرابع

(٢) أصغر قياس موجب للزاوية ٥٠٠° = ٥٠٠ - ٣٦٠° = ١٤٠°
∴ الزاوية تقع في الربع الثاني

(٣) أصغر قياس موجب للزاوية -٦٣٠ = -٦٣٠ + ٢×٣٦٠ = ٩٠°
∴ الزاوية تقع على وص وتسمى زاوية ربعية

أ/ علي حمدون

مثال عين أكبر قياس سالب للزوايا الآتية :

(١) ٣٢٠° (٢) -٤٥٠° (٣) -٩٠٠°

الحل

(١) أكبر قياس سالب للزاوية ٣٢٠° = ٣٢٠° - ٣٦٠° = -٤٠°

(٢) أكبر قياس سالب للزاوية -٤٥٠° = -٤٥٠° + ٣٦٠° = -٩٠°

(٣) أكبر قياس سالب للزاوية -٩٠٠° = -٩٠٠° + ٢ × ٣٦٠° = -١٨٠°

مثال أكمل ما يأتي

(١) إذا كانت θ هو أصغر قياس موجب لزاوية موجهة فإن أكبر قياس سالب لها يساوي ....

(٢) إذا كانت θ هو أكبر قياس سالب لزاوية موجهة فإن أصغر قياس موجب لها يساوي ....

(٣) إذا كانت θ = ٧م وكانت θ زاوية ربعية فإن أقل قيمة للعدد م = ... حيث م > ٠

(٤) إذا كانت م ، ب قياسا زاويتين وكان م = ب + ن × ٣٦٠° حيث ن ∈ ص زاوية م .... زاوية ب

(٥) الزاوية التي قياسها ٤٥° + (٤ن + ١) × ٩٠° تقع في الربع ....

الحل

(١) θ - ٣٦٠° (٢) θ + ٣٦٠° (٣) م = ٩٠°

(٤) ∵ م = ب + ن × ٣٦٠° حيث ن ∈ ص

∴ زاوية م تكافئ زاوية ب

(٥) ∵ θ = ٤٥° + (٤ن + ١) × ٩٠°

∴ θ = ٤٥° + ٤ن × ٩٠° + ٩٠°

∴ θ = ١٣٥° + ن × ٣٦٠° ∴ θ = ١٣٥° أصغر قياس موجب

∴ θ تقع في الربع الثاني

تذكر ما يأتي جيداً

(١) إذا كان هـ ، ب قياسا زاويتين متكافئتين فإن :-

هـ = ب + ن × ٣٦٠° حيث ن ∈ ص

(٢) لزاوية موجهة أو لزاويتين موجهتين متكافئتين يتحقق

القياس الموجب - القياس السالب = ٣٦٠°

مثال

إذا كان ٢هـ ، -هـ قياسا زاويتين متكافئتين فإن أقل قيمة لـ هـ تساوي ------ حيث هـ > ٠

الحل

∵ ٢هـ ، -هـ متكافئتان ∴ هـ = -هـ + ٣٦٠° × ن

∴ ٢هـ = ن × ٣٦٠ ∴ هـ = ١٨٠ × ن حيث ن ∈ ص

∴ أقل قيمة موجبة لـ هـ = ١٨٠°

مثال

إذا كان (٣س - ٥) أصغر قياس موجب ، (٣ص - ٥) أكبر قياس سالب لزاويتين متكافئتين فإن س - ص = ...

الحل

∵ الزاويتان متكافئتان ∴ (٣س - ٥) - (٣ص - ٥) = ٣٦٠°

∴ ٣س - ٥ - ٣ص + ٥ = ٣٦٠°

∴ ٣س - ٣ص = ٣٦٠ بالقسمة على ٣

∴ س - ص = ١٢٠°

تمارين

(١) الزوج المرتب (و$\overrightarrow{ب}$ ، و$\overrightarrow{أ}$) يعبر عنه بالزاوية الموجهة ......

(أ) ∠ أ و ب (ب) ∠ ب و أ (ج) ∠ و أ ب (د) غير ذلك

(٢) الزاوية الموجهة في الوضع القياسي هي زاوية ضلعها الابتدائي يقع على ....

(أ) و$\overrightarrow{س}$ (ب) و$\overrightarrow{ص}$ (ج) و$\overrightarrow{س'}$ (د) و$\overrightarrow{ص'}$

(٣) الزاوية التي قياسها ٧٠° في وضعها القياسي تكافئ الزاوية التي قياسها

(أ) ٢٩٠° (ب) -٢٩٠° (ج) -١٩٠° (د) ٤٣٠°

(٤) أصغر قياس موجب لزاوية موجهة قياسها -٣٠° هو ......

(أ) -٣٣٠° (ب) ١٥٠° (ج) ٣٩٠° (د) ٣٣٠°

(٥) أكبر قياس سالب لزاوية موجهة قياسها ١٥٠° هو ......

(أ) -٢١٠° (ب) ٢١٠° (ج) -٥١٠° (د) غير ذلك

(٦) الزاوية التي قياسها ٣٠٤٥° تقع في الربع ......

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

(٧) إذا كان أ ، ب قياسا زاويتين متكافئتين وكان ج ∈ ص فإن أ+ج ، ب+ج تكونان ......

(أ) متكافئتين (ب) متتامتين (ج) متكاملتين

(٨) اذا كان ب ، د-ب زاويتان متكافئتان فإن احد قيم ب هي .....

(أ) ٨٠° (ب) ١٨٠° (ج) ٩٠° (د) ٢٧٠°

(٩) اذا كان (θ+٣٠°) ، (٣٠°-٨θ) هما القياسان الموجب والسالب لزاوية موجهة على الترتيب فإن أقل قيمة موجبة لـ θ تكون ....

(أ) ٢٠° (ب) ٣٠° (ج) ٤٠° (د) ٦٠°

(١٠) الزاوية التي قياسها ٩٠ (٤ن+١) + ٦٠° تكافئ الزاوية التي قياسها .... حيث ن ∈ ص

(أ) ١٠٠° (ب) -٣٠° (ج) ٢٧٠° (د) -٢١٠°

(١١) اذا كان الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي يمر بالنقطة (-٢ ، ٣) فإن الزاوية تقع في الربع ....

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

(١٢) اذا دار الضلع النهائي لزاوية قياسها ٤٠° في الوضع القياسي دورتين وربع في اتجاه عقارب الساعة فإن الضلع النهائي يمثل زاوية قياسها ......

(أ) -٤٠ (ب) ٤٠° (ج) -٥٠° (د) ١٥٠°

(١٣) زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها ٦٠° دار ضلعها النهائي دورة ونصف في عكس اتجاه حركة عقرب الساعة فإن الضلع النهائي يمثل زاوية قياسها ......

(أ) -١٢٠° (ب) ٢٤٠° (ج) ٦٠٠° (د) أ ، ب معاً

القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية

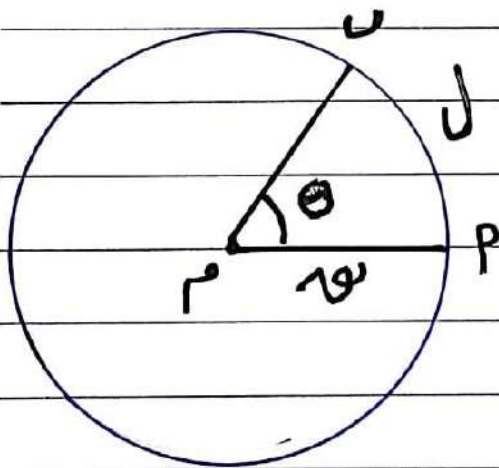
* القياس الستيني لزاوية مركزية :-

تعتمد فكرته على تقسيم محيط الدائرة الى ٣٦٠ قوساً متساوية الاطوال بحيث يمثل كل قوس من هذه الاقواس درجة ستينية واحدة يرمز لها بالرمز ١°
فاذا كانت الزاوية تحصر ٢٠ قوساً كان قياسها ٢٠°
واذا كانت الزاوية تحصر ١١٠ قوساً كان قياسها ١١٠°
وقس على ذلك

* ملحوظة :-

١° = ٦٠َ دقيقة   ١َ = ٦٠ً ثانية

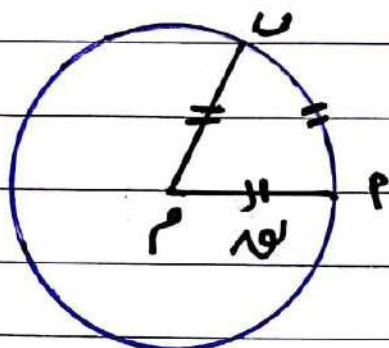
* القياس الدائري لزاوية مركزية :-

هو النسبة بين طول القوس المقابل للزاوية المركزية الى طول نصف قطر الدائرة .

فاذا رمزنا الى طول القوس $\overset{\frown}{أب}$ بالرمز ل فان القياس الدائري للزاوية المركزية θ يتعين من العلاقة

$$\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$$

حيث ل طول القوس $\overset{\frown}{أب}$ ، نق نصف قطر الدائرة

* وحدة قياس الزاوية في القياس الدائري هي (الراديان)

الزاوية النصف قطرية

هي زاوية مركزية تحصر قوساً طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة وقياسها = $١^{ء}$

مثال

(١) زاوية مركزية تحصر قوساً في دائرة طوله ٥٠ سم فإذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٠ سم فإن القياس الدائري لهذه الزاوية ....

(٢) زاوية مركزية قياسها $٣^{ء}$ تحصر قوساً طوله ١٥ سم فإن طول قطر هذه الدائرة يساوي .....

(٣) زاوية مركزية قياسها $١٠^{ء}$ مرسومة عند مركز دائرة طول نصف قطرها ٢ سم فإنها تحصر قوساً طوله .....

الحل

(١) ∵ ل = ٥٠ سم ، نق = ١٠ سم ∴ $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$

∴ $\theta^{ء} = \frac{٥٠}{١٠} = ٥^{ء}$

(٢) ∵ $\theta^{ء} = ٣^{ء}$ ، ل = ١٥ سم ∴ $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$

∴ $٣ = \frac{١٥}{نق}$ منها نق = $\frac{١٥ \times ١}{٣}$ = ٥ سم ∴ طول القطر = ١٠ سم

(٣) ∵ $\theta^{ء} = ١٠^{ء}$ ، نق = ٢ سم ∴ $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$

∴ $١٠ = \frac{ل}{٢}$ منها ل = ١٠ × ٢ = ٢٠ سم

العلاقة بين القياس الستيني والدائري

العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري هي

$\frac{س^\circ}{\theta^{د}} = \frac{180^\circ}{\pi}$ ومنها $س^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \times \theta^{د}$

$\theta^{د} = \frac{\pi}{180^\circ} \times س^\circ$

أي أن القياس الستيني لزاوية = قياسها الدائري $\times \frac{180^\circ}{\pi}$

القياس الدائري لزاوية = قياسها الستيني $\times \frac{\pi}{180^\circ}$

مثال أوجد القياس الدائري للزوايا الآتية

(1) 225° (2) -240° (3) -420°

الحل

(1) $\theta^{د} = \frac{\pi}{180^\circ} \times س^\circ \therefore \theta^{د} = \frac{\pi}{180^\circ} \times 225 = \frac{5}{4}\pi^{د}$
$\simeq 3{,}93^{د}$

(2) $\because \theta^{د} = \frac{\pi}{180^\circ} \times س^\circ \therefore \theta^{د} = \frac{\pi}{180^\circ} \times -240^\circ = \frac{-4}{3}\pi^{د}$
$\simeq -4{,}189^{د}$

(3) $\because \theta^{د} = \frac{\pi}{180^\circ} \times س^\circ \therefore \theta^{د} = \frac{\pi}{180} \times -420^\circ = \frac{-7}{3}\pi^{د}$
$\simeq 7{,}33^{د}$

مثال أوجد القياس الستيني للزوايا الآتية

(١) 1.1 (٢) $\frac{3}{4}\pi$ (٣) $\frac{5}{16}\pi$

الحل

(١) $\because$ س$^\circ$ $= \theta^{ء} \times \frac{180}{\pi}$ $\therefore$ س$^\circ$ $= 1.1 \times \frac{180}{\pi} \simeq 63^\circ\ 1'\ 31''$

(٢) $\because$ س$^\circ$ $= \frac{3}{4}\pi \times \frac{180}{\pi}$ منها س$^\circ$ $= 135^\circ$

(٣) س$^\circ$ $= \frac{5}{16}\pi \times \frac{180}{\pi}$ منها س$^\circ$ $= 56^\circ\ 15'$

مثال أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها 140° في دائرة نصف قطرها 10 سم

الحل

$\because$ نق $= 10$ سم

$\because$ س$^\circ$ $= 140^\circ$ قياس ستيني للزاوية المركزية $\because \theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$

$\therefore$ لابد من تحويل القياس الستيني الى قياس دائري

$\because \theta^{ء} =$ س$^\circ$ $\times \frac{\pi}{180^\circ}$ $\therefore \theta^{ء} = 140^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \simeq 2.44^{ء}$

$\because \theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$ $\therefore 2.44 = \frac{ل}{10}$ منها ل $= 24.4$ سم

مثال زاوية مركزية قياسها 120° تقابل قوساً طوله 15 سم أوجد طول نصف قطر دائرتها

الحل

$\because$ س$^\circ$ $= 120^\circ$ $\therefore \theta^{ء} = 120^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \simeq 2.09^{ء}$

$\because \theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$ $\therefore 2.09 = \frac{15}{نق}$ منها نق $= 7.18$ سم

تمارين

(١) القياس الدائري للزاوية ١٨٠° يساوي ------

(٢) القياس الدائري للزاوية النصف قطرية يساوي ------
بينما قياسها الستيني يساوي ------

(٣) قياس الزاوية المركزية المرسومة في نصف دائرة ...... راديان

(٤) قياس الزاوية المحيطية المرسومة في ربع دائرة ...... راديان

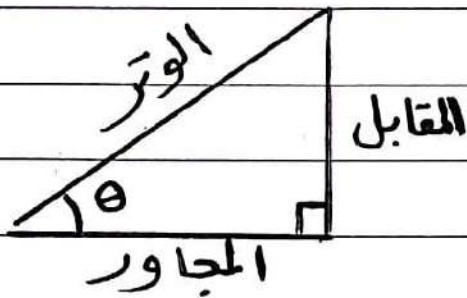
(٥) القوس الذي طوله ٦ π سم في دائرة طول نصف قطرها ١٨ سم يقابل زاوية محيطية قياسها ...... راديان

(٦) Δ أ ب جـ فيه ق(∠أ) : ق(∠ب) : ق(∠جـ) = ٣ : ٤ : ٥
أوجد القياس الدائري لزاوية جـ

(٧) عين الربع الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها $\frac{٢٣\pi}{٩}$ راديان

(٨) إذا كان $\overline{\text{س ص}}$ قطر في الدائرة م طوله ١٨ سم
رسم الوتر $\overline{\text{ص ع}}$ بحيث ق(∠س ص ع) = ٦٠°
أوجد طول كلا من

(أ) $\overset{\frown}{\text{س ع}}$ (ب) $\overset{\frown}{\text{ع ص}}$

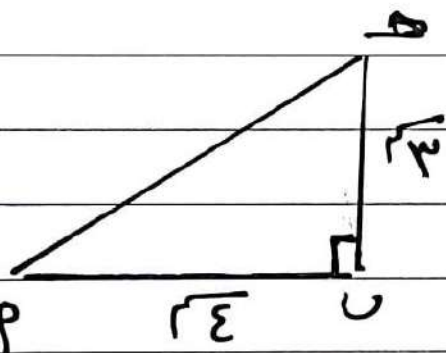
الدوال المثلثية

النسب المثلثية للزاوية الحادة :-

فى اى مثلث قائم الزاوية يكون :

$\text{جا}\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\text{جتا}\,\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\text{طا}\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

مثال

فى الشكل المقابل
اوجد النسب المثلثية لزاوية أ

الحل

∵ Δ أ ب ح قائم الزاوية فى ب
فيه أ ب = ٤سم ، ب ح = ٣سم ∴ أ ح = ٥سم ← θ

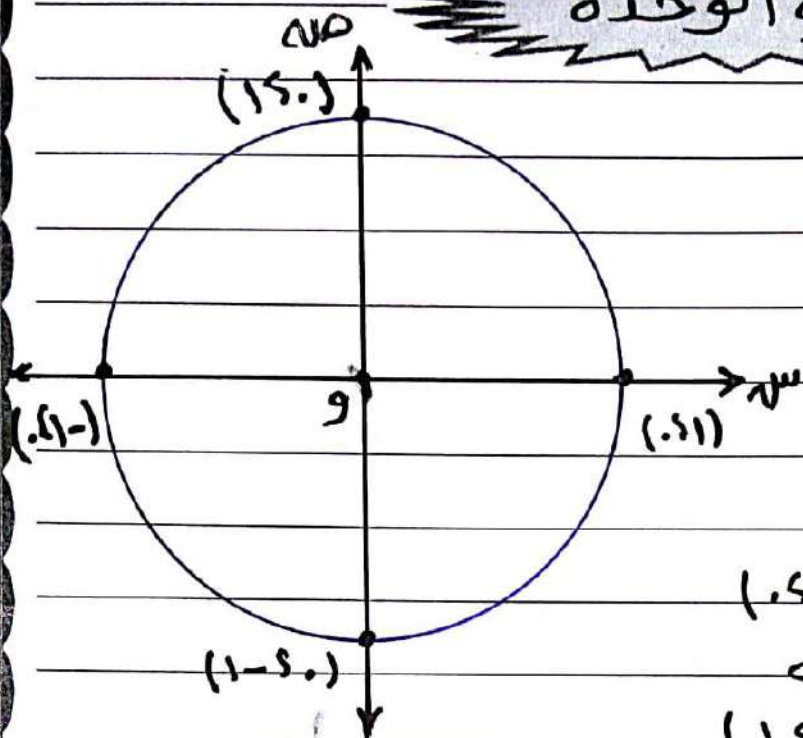
∵ جا أ = $\frac{\text{ب ح}}{\text{أ ح}}$ ∴ جا أ = $\frac{٣}{٥}$

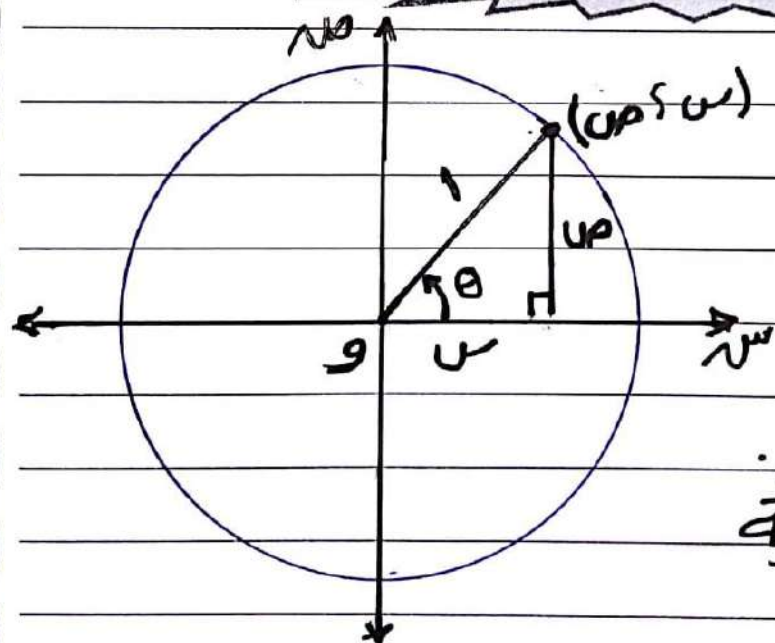
∵ جتا أ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$ ∴ جتا أ = $\frac{٤}{٥}$

∵ طا أ = $\frac{\text{ب ح}}{\text{أ ب}}$ ∴ طا أ = $\frac{٣}{٤}$

* تدريب :-

اوجد النسب المثلثية لزاوية ح فى الشكل السابق

دائرة الوحدة

دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة الاصل و (٠، ٠) وطول نصف قطرها واحد وحدة طول تقطع محور السينات في النقطتين (-١، ٠)، (١، ٠) وتقطع محور الصادات في النقطتين (٠، -١)، (٠، ١)

الدوال المثلثية الاساسية ومقلوباتها

اذا كان θ هو قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي يقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة (س، ص) فان: الدوال المثلثية الاساسية لهذه الزاوية هي :

(١) دالة جيب تمام الزاوية هي جتا $\theta = \frac{س}{١} =$ س

(٢) دالة جيب الزاوية هي حا $\theta = \frac{ص}{١} =$ ص

(٣) دالة ظل الزاوية هي $ظا\theta = \frac{ص}{س} = \frac{جا\theta}{جتا\theta}$ ، $س \neq 0$

* ثانيا مقلوبات الدوال المثلثية الاساسية :

(١) دالة قاطع الزاوية وهي $قا\theta = \frac{1}{جتا\theta} = \frac{1}{س}$ ، $س \neq 0$

(٢) دالة قاطع تمام الزاوية وهي $قتا\theta = \frac{1}{جا\theta} = \frac{1}{ص}$ ، $ص \neq 0$

(٣) دالة ظل تمام الزاوية وهي $ظتا\theta = \frac{1}{ظا\theta} = \frac{س}{ص}$ ، $ص \neq 0$

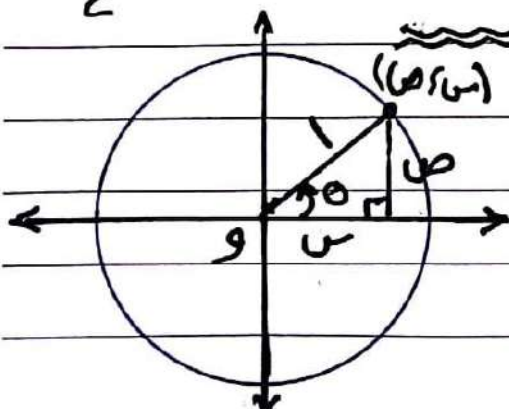
مثال

اذا قطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها يساوي θ دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{3}{5} ، \frac{4}{5})$ أوجد جميع الدوال الاساسية لهذه الزاوية

الحل

(١) ∵ $جتا\theta = س$ ∴ $جتا\theta = \frac{3}{5}$ ∴ $قا\theta = \frac{5}{3}$

(٢) ∵ $جا\theta = ص$ ∴ $جا\theta = \frac{4}{5}$ ∴ $قتا\theta = \frac{5}{4}$

(٣) ∵ $ظا\theta = \frac{ص}{س}$ ∴ $ظا\theta = \frac{4}{3}$ ∴ $ظتا\theta = \frac{3}{4}$

ملاحظة هامة

في دائرة الوحدة يتحقق العلاقة

$س^2 + ص^2 = 1$ ∴ $جتا^2\theta + جا^2\theta = 1$

مثال: إذا كان الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (س، $\frac{٣}{٥}$)
أوجد قيمة س حيث س ∈ ح$^{+}$
ثم أوجد جاهـ، طاهـ، قاهـ

الحل

∵ الضلع النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة (س، $\frac{٣}{٥}$)
∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١ ∴ س^{٢} + ($\frac{٣}{٥}$)^{٢} = ١
∴ س^{٢} + $\frac{٩}{٢٥}$ = ١ ∴ س^{٢} = ١ − $\frac{٩}{٢٥}$
∴ س^{٢} = $\frac{١٦}{٢٥}$ منها س = ± $\frac{٤}{٥}$
∵ س ∈ ح$^{+}$ معطى ∴ س = $\frac{٤}{٥}$ فقط ← أولاً

ثانياً: ∵ س = $\frac{٤}{٥}$ ∴ نقطة تقاطع الضلع النهائي مع دائرة الوحدة هي ($\frac{٤}{٥}$، $\frac{٣}{٥}$)
∴ جاهـ = ص = $\frac{٣}{٥}$
طاهـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٣}{٤}$ قاهـ = $\frac{١}{س}$ = $\frac{٥}{٤}$

مثال: إذا كانت ب(س، س) حيث س > ٠ هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ مع دائرة الوحدة فإن جتاθ = ------

الحل

∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١ ∴ (س)^{٢} + س^{٢} = ١ ∴ ٢س^{٢} = ١
∴ س^{٢} = $\frac{١}{٢}$ منها س = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$
∵ س > ٠ معطى ⟵ ∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ فقط
∴ ب = ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) منها جتاθ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

إشارة الدوال المثلثية

* موقع الضلع النهائى للزاوية الموجهة فى الوضع القياسى هو الذى يحدد إشارة الدوال المثلثية لهذه الزاوية فإذا وقع الضلع النهائى فى :-

الربع الثانى	الربع الأول
جا هـ ، قتا هـ موجبتين وباقى الدوال سالبة	كل الدوال المثلثية موجبة
الربع الثالث	**الربع الرابع**
ظا هـ ، ظتا هـ موجبتين وباقى الدوال سالبة	جتا هـ ، قا هـ موجبتين وباقى الدوال سالبة

* ملاحظات هامة :-

١- الزوايا المتكافئة تكون لها نفس الدوال المثلثية
٢- الدوال المثلثية للزوايا المتكافئة لها نفس الإشارة
٣- لتعيين إشارة دالة مثلثية لابد من إيجاد أصغر قياس موجب للزاوية

مثال عين اشارة الدوال الاتية

(1) حا ١٦٩° (2) جتا ٣٣٠° (3) ظتا (−١٠٠°)

(4) قا ٨٦٩° (5) جتا $\frac{٥\pi}{٤}$

الحل

(1) ∵ ١٦٩° تقع في الربع الثاني ∴ حا ١٦٩° موجبة

(2) ∵ ٣٣٠° تقع في الربع الرابع ∴ جتا ٣٣٠° موجبة

(3) ∵ −١٠٠° = −١٠٠ + ٣٦٠°

= ٢٦٠° تقع في الربع الثالث ∴ ظتا (−١٠٠°) موجبة

(4) ∵ ٨٦٩° = ٨٦٩° − ٢ × ٣٦٠°

= ١٤٩° تقع في الربع الثاني ∴ قا ٨٦٩° سالبة

(5) ∵ $\frac{٥\pi}{٤} = \frac{٥\pi}{٤} \times \frac{١٨٠}{\pi}$ = ٢٢٥° ∴ جتا $\frac{٥\pi}{٤}$ سالبة

مثال إذا كانت جتا $\theta = \frac{٤}{٥}$ حيث θ زاوية حادة أوجد الدوال المثلثية للزاوية θ

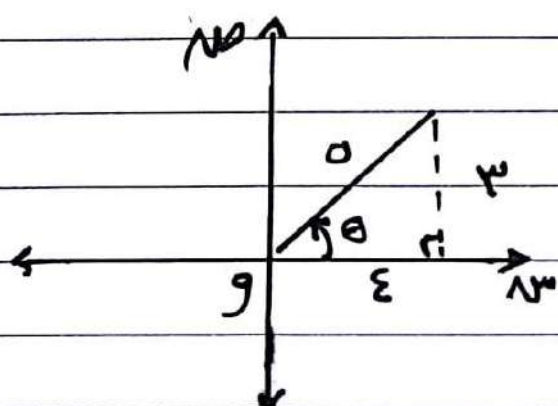
الحل

∵ θ زاوية حادة ∴ θ تقع في الربع الأول

ومن الرسم نجد أن

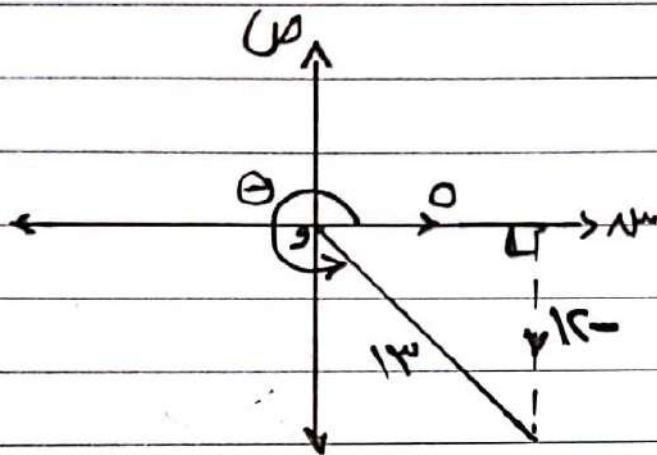
جتا $\theta = \frac{٤}{٥}$ ∴ قا $\theta = \frac{٥}{٤}$

حا $\theta = \frac{٣}{٥}$ ∴ قتا $\theta = \frac{٥}{٣}$

ظا $\theta = \frac{٣}{٤}$ ∴ ظتا $\theta = \frac{٤}{٣}$

مثال اذا كانت $\theta \in]\frac{3\pi}{2} ، 2\pi[$ وكانت جتا $\theta = \frac{5}{13}$ فاوجد الدوال المثلثية الأساسية للزاوية θ

الحل

$\because \theta \in]\frac{3\pi}{2} ، 2\pi[$ $\therefore \theta \in]270° ، 360°[$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الرابع

$\therefore$ جتا $\theta = \frac{5}{13}$

جا $\theta = -\frac{12}{13}$

ظا $\theta = \frac{-12}{5}$

مثال أكمل ما يأتي:

(1) اذا كان جا $\theta = -1$ ، جتا $\theta = 0$ فإن $\theta = ...°$

(2) اذا كان جتا $\theta = -1$ ، جا $\theta = 0$ فإن $\theta = ...°$

(3) اذا كان جتا $\theta = 0$ ، جا $\theta = 1$ فإن $\theta = ...°$

الحل

(1) $\because$ جتا $\theta = 0$ ، جا $\theta = -1$

$\therefore$ الضلع النهائي للزاوية يمر (يقطع دائرة الوحدة) عند النقطة
$(0 ، -1) \Leftarrow \theta = 270°$

(2) بالمثل الضلع النهائي يمر بالنقطة $(-1 ، 0)$ $\therefore \theta = 180°$

(3) بالمثل الضلع النهائي يمر بالنقطة $(0 ، 1)$ $\therefore \theta = 90°$

مثال أكمل ما يأتي

(1) إذا كان قا θ = 2 ، جا θ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن θ تقع في الربع ....

(2) إذا كان طا θ = $\frac{1}{2}$ حيث θ زاوية حادة في الوضع القياسي فإن ضلعها يقطع دائرة الوحدة في النقطة ......

الحل

(1) ∵ قا θ = 2 موجبة ، جا θ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ سالبة

∴ θ تقع في الربع الرابع

(2) ∵ طا θ = $\frac{1}{2}$ حيث θ زاوية حادة

∴ جتا θ = $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ، جا θ = $\frac{1}{\sqrt{5}}$

∴ الضلع النهائي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة $\left(\frac{2}{\sqrt{5}} ، \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

مثال إذا كانت θ ∈ $]\frac{\pi}{2} ، \pi[$ وكانت جا θ = $\frac{3}{5}$ أوجد قيمة المقدار قتا θ جا θ − طا θ ظتا θ + جتا² θ

الحل

∵ θ ∈]90° ، 180°[∴ θ تقع في الربع الثاني

∴ المقدار = قتا θ جا θ − طا θ ظتا θ + جتا² θ

= 1 − 1 + (جتا θ)²

= صفر + $\left(\frac{-4}{5}\right)^2$

∴ المقدار = $\frac{16}{25}$

تمارين

(١) القياس الدائري للزاوية ٢٥° يساوي ......

(٢) القياس الستيني للزاوية $\frac{2}{5}\pi$ يساوي ......

(٣) القياس الستيني لزاوية مركزية تقابل قوساً طوله π سم في دائرة نصف قطرها ٤ سم يساوي ......

(٤) الزاوية التي قياسها $\frac{-11\pi}{4}$ تقع في الربع ......

(٥) مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الخماسي بالتقدير الدائري يساوي ......

(٦) قياس أحد زوايا مضلع منتظم عدد أضلاعه ٨ ضلع بالتقدير الدائري يساوي ......

(٧) إذا كانت قا $\theta = \sqrt{2}$ ، قتا $\theta = -\sqrt{2}$ فإن الزاوية التي قياسها θ تقع في الربع ......

(٨) إذا كان قا $\theta = \sqrt{2}$ ، قتا $\theta = -\sqrt{2}$ حيث θ قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي فإن الضلع النهائي لهذه الزاوية يقطع دائرة الوحدة في النقطة ......

(٩) إذا كان $\theta \in$ ح ، حا $\theta = \frac{-24}{25}$ ، $\theta \in]\frac{3\pi}{2} , 2\pi[$

فإن $\frac{\text{حا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta}{\text{حا}\,\theta} =$ ......

(١٠) اذا كانت قتا θ = ٢ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فان θ = ...°

(١١) اذا كان جتا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فان θ = ...°

(١٢) اذا كان جتا θ = $\frac{1}{2}$ ، جا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فان θ = ...°

(١٣) ابحث اشارة الدوال الاتية

أ- طا ٤١٠° ب- ظتا ($\frac{-3\pi}{4}$) جـ- قا ($\frac{-25\pi}{6}$)

(١٤) اذا كانت θ هي قياس زاوية ميل المستقيم ص = $\frac{3}{4}$س + ١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات أوجد الدوال المثلثية الاساسية للزاوية θ

الزوايا المنتسبة

* الزاويتين المنتسبتين :-

هما زاويتان مجموع قياسهما أو الفرق بين قياسهما يساوي عدداً صحيحاً من القوائم

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين

(١) اذا كان قياسا الزاويتين θ ، ١٨٠° − θ :

فإن :-

جا(١٨٠° − θ) = جاθ   قتا(١٨٠° − θ) = قتاθ

جتا(١٨٠° − θ) = − جتاθ   قا(١٨٠° − θ) = − قاθ

ظا(١٨٠ − θ) = − ظاθ   ظتا(١٨٠ − θ) = − ظتاθ

حيث θ زاوية حادة

مثال

جا ١٢٠° = جا(١٨٠° − ٦٠°) = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

جتا ١٥٠° = جتا(١٨٠° − ٣٠°) = − جتا ٣٠° = − $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ظا ١٣٥° = ظا(١٨٠° − ٤٥°) = − ظا ٤٥ = −١

(٢) اذا كان قياسا الزاويتين θ ، ١٨٠° + θ فإن :-

جا(١٨٠° + θ) = − جاθ   قتا(١٨٠° + θ) = − قتاθ

جتا(١٨٠° + θ) = − جتاθ   قا(١٨٠° + θ) = − قاθ

ظا $(180^\circ + \theta) =$ ظا θ ظتا $(180^\circ + \theta) =$ ظتا θ

حيث θ زاوية حادة

مثال

حا $210^\circ =$ حا $(180^\circ + 30^\circ) = -$ حا $30^\circ = -\frac{1}{2}$

جتا $240^\circ =$ جتا $(180^\circ + 60^\circ) = -$ جتا $60^\circ = -\frac{1}{2}$

ظا $225^\circ =$ ظا $(180^\circ + 45^\circ) =$ ظا $45^\circ = 1$

(٣) اذا كان قياسا الزاويتين θ ، $360^\circ - \theta$ فإن:

حا $(360^\circ - \theta) = -$ حا θ قتا $(360^\circ - \theta) = -$ قتا θ

جتا $(360^\circ - \theta) =$ جتا θ قا $(360^\circ - \theta) =$ قا θ

ظا $(360^\circ - \theta) = -$ ظا θ ظتا $(360^\circ - \theta) = -$ ظتا θ

مثال

حا $330^\circ =$ حا $(360^\circ - 30^\circ) = -$ حا $30^\circ = -\frac{1}{2}$

جتا $300^\circ =$ جتا $(360^\circ - 60^\circ) =$ جتا $60^\circ = \frac{1}{2}$

ظا $330^\circ =$ ظا $(360^\circ - 30^\circ) = -$ ظا $30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(٤) اذا كان قياسا الزاويتين θ ، $-\theta$ فإن

حا $(-\theta) = -$ حا θ قتا $(-\theta) = -$ قتا θ

جتا $(-\theta) =$ جتا θ قا $(-\theta) =$ قا θ

ظا $(-\theta) = -$ ظا θ ظتا $(-\theta) = -$ ظتا θ

* مثلا حا $(-60^\circ) = -$ حا $60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

جتا $(-60^\circ) =$ جتا $60^\circ = \frac{1}{2}$

ملاحظات هامة

* لإيجاد الدوال المثلثية للزاوية التي قياسها يساوي (هـ) نتبع الآتي

١- نوجد أصغر قياس موجب للزاوية (هـ)

حا ، قتا موجبتين فقط هـ = (١٨٠° - θ)	كل الدوال موجبة هـ = θ
طا ، ظتا موجبتين فقط هـ = (١٨٠° + θ)	جتا ، قا موجبتين فقط هـ = (٣٦٠° - θ)

٢- نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية (هـ)

٣- بعد تحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية (هـ) نكتب الزاوية (هـ) على الصورة

هـ = ١٨٠ - θ أو هـ = ١٨٠ + θ أو هـ = ٣٦٠ - θ

حيث θ زاوية حادة كما موضح بالرسم بعد ذلك يكون الدالة المثلثية للزاوية (هـ) = إشارة الدالة × الدالة المثلثية للزاوية الحادة (θ)

مثال

أوجد قيمة كلاً مما يأتي :

(١) حا ١٥٠° جتا (-٣٠٠°) + جتا ٩٣٠° ظتا ٢٤٠°

(٢) حا ٦٠٠° جتا (-٣٠°) + حا ١٥٠° جتا (-٢٤٠°).

الحل

(١) ∵ المقدار = حا (١٥٠°) جتا ٦٠° + جتا ٢١٠° ظتا ٢٤٠°

= حا (١٨٠° - ٣٠°) جتا ٦٠° + جتا (١٨٠ + ٣٠°) ظتا (١٨٠° + ٦٠°)

= حا ٣٠° جتا ٦٠° + - جتا ٣٠° ظتا ٦٠°

= $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

(٢) ∵ المقدار = حا ٢٤٠° جتا ٣٠° + حا ١٥٠° جتا ١٢٠°

$= $ حا(١٨٠° + ٦٠°) جتا ٣٠° + حا(١٨٠° − ٣٠°) جتا(١٨٠° − ٦٠°)

$= -$ حا ٦٠° × جتا ٣٠° + حا ٣٠° × − جتا ٦٠°

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{-3}{4} - \frac{1}{4} = -1$

مثال إذا كان الضلع النهائي لزاوية قياسها θ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5})$ فأوجد:

(١) حا $(180° + \theta)$ (٢) ظا $(360° - \theta)$

(٣) قا $(\pi + \theta)$ (٤) قتا $(\theta - \pi)$

الحل

∵ الضلع النهائي للزاوية الموجهة يقطع الضلع النهائي لدائرة الوحدة عند النقطة $(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5})$

∴ جتا $\theta = \frac{-3}{5}$ حا $\theta = \frac{4}{5}$ ظا $\theta = -\frac{4}{3}$

(١) ∴ حا $(180° + \theta) = -$ حا $\theta = -\frac{4}{5}$

(٢) ظا $(360° - \theta) = -$ ظا $\theta = -(\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3}$

(٣) قا $(\theta + 180°) =$ قا $(180° + \theta) = -$ قا $\theta = -(\frac{5}{-3}) = \frac{5}{3}$

(٤) قتا $(\theta - \pi) =$ قتا $(\theta - \pi + 2\pi) =$ قتا $(\theta + \pi)$

$=$ قتا $(180° + \theta) = -$ قتا $\theta = -\frac{5}{4}$

(٥) اذا كان قياسا الزاويتين θ ، $90 - \theta$ فإن :

حا$(90^\circ - \theta)$ = جتاθ قتا$(90^\circ - \theta)$ = قاθ

جتا$(90^\circ - \theta)$ = حاθ قا$(90^\circ - \theta)$ = قتاθ

طا$(90^\circ - \theta)$ = ظتاθ ظتا$(90^\circ - \theta)$ = طاθ

مثال

حا30° = حا$(90^\circ - 60^\circ)$ = جتا60° = $\frac{1}{2}$

جتا50° = جتا$(90^\circ - 40^\circ)$ = حا40°

طا35° = طا$(90^\circ - 55^\circ)$ = ظتا55°

مثال

(١) اذا كان حا$(2س - 15^\circ)$ = جتا$(س + 75^\circ)$ فإن س = ...

(٢) اذا كان $\frac{\text{طا}(43^\circ - 5س)}{\text{ظتا}(47^\circ + 6س)} = 1$ فإن س = ...

(٣) $\frac{\text{حا}70^\circ}{\text{جتا}20^\circ}$ = ...

الحل

(١) ∵ حا$(2س - 15^\circ)$ = جتا$(س + 75^\circ)$

∴ $2س - 15^\circ + س + 75^\circ = 90^\circ$ منها س = 10°

(٢) ∵ طا$(43^\circ - 5س)$ = ظتا$(47^\circ + 6س)$

∴ $43^\circ - 5س + 47^\circ + 6س = 90^\circ$ منها س = 0°

(٣) $\frac{\text{حا}70^\circ}{\text{جتا}20^\circ} = \frac{\text{جتا}20^\circ}{\text{جتا}20^\circ} = 1$

(٦) اذا كان قياسا الزاويتين θ ، $90^\circ + \theta$ فإن :

حا $(90^\circ + \theta)$ = جتا θ قتا $(90^\circ + \theta)$ = قا θ

جتا $(90^\circ + \theta)$ = - حا θ قا $(90^\circ + \theta)$ = - قتا θ

ظا $(90^\circ + \theta)$ = - ظتا θ ظتا $(90^\circ + \theta)$ = - ظا θ

مثال

حا $(90^\circ + 30^\circ)$ = جتا 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

جتا (150°) = جتا $(90^\circ + 60^\circ)$ = - جا 60° = - $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ظا (120°) = ظا $(90^\circ + 30^\circ)$ = - ظتا 30° = - $\sqrt{3}$

مثال

إذا كان أ - ب = 90° وكان ظا ب = ٣ فإن ظا أ = ...

الحل

$\because$ أ - ب = 90° $\therefore$ أ = 90° + ب

$\therefore$ ظا أ = ظا $(90^\circ + ب)$ = - ظتا ب = $\frac{-1}{3}$

(٧) اذا كان قياسا الزاويتين θ ، $270^\circ - \theta$ فإن :

حا $(270^\circ - \theta)$ = - جتا θ قتا $(270^\circ - \theta)$ = - قا θ

جتا $(270^\circ - \theta)$ = - حا θ قا $(270^\circ - \theta)$ = - قتا θ

ظا $(270^\circ - \theta)$ = ظتا θ ظتا $(270^\circ - \theta)$ = ظا θ

مثال

حا (240°) = حا $(270^\circ - 30^\circ)$ = - جتا 30° = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

جتا (210°) = جتا $(270^\circ - 60^\circ)$ = - حا 60° = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

ظا (225°) = ظا $(270^\circ - 45^\circ)$ = ظا 45° = ١

(٨) اذا كان قياسا الزاويتين θ ، ٢٧٠° + θ فإن :-

حا(٢٧٠° + θ) = - جتا θ — قتا(٢٧٠° + θ) = - قا θ

جتا(٢٧٠° + θ) = حا θ — قا(٢٧٠° + θ) = قتا θ

طا(٢٧٠° + θ) = - ظتا θ — ظتا(٢٧٠° + θ) = - طا θ

مثال

حا (٣٠٠°) = حا(٢٧٠° + ٣٠°) = - جتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

جتا(٣٠٠°) = جتا(٢٧٠° + ٣٠°) = حا ٣٠° = $\frac{1}{2}$

طا(٣١٥°) = طا(٢٧٠° + ٤٥°) = - ظتا ٤٥ = - ١

ملاحظات هامة

* لايجاد الدوال المثلثية للزاوية التي قياسها يساوي (هـ) نتبع الآتي

(١) نحدد موقع الزاوية (هـ)

(٢) نكتب الزاوية (هـ) على الصورة ٩٠ - θ أو ٩٠ + θ أو ٢٧٠ - θ أو ٢٧٠ + θ حيث θ زاوية حادة كما موضح بالرسم

حا ، قتا موجبتين فقط هـ = ٩٠° + θ	كل الدوال موجبة هـ = ٩٠° - θ
طا ، ظتا موجبتين فقط هـ = ٢٧٠° - θ	جتا ، قا موجبتين فقط هـ = ٢٧٠° + θ

(٣) ولايجاد دالة مثلثية للزاوية التي قياسها (هـ)

(أ) نضع اشارة الدالة بحسب الربع الذي تقع فيه الزاوية (هـ)

(ب) نغير الدالة المثلثية وذلك إما بحذف (تا) أو أضافة (تا)

أي أن الدالة المثلثية للزاوية (هـ) = (الاشارة) × الدالة المثلثية بعد التغيير للزاوية الحادة θ

مثال

(١) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة
جتا(-١٥٠٠°) حا ٦٠٠° + جتا($\frac{-٢\pi}{٣}$) حا ٣٣٠° - قا($\frac{-\pi}{٤}$) طا ٩٠٠° =

(٢) إذا كان ١٣ جتا(٢٧٠° + هـ) - ٥ = ٠ حيث هـ ∈] $\frac{\pi}{٢}$ ، π [
أوجد قيمة قتا(٢٧٠° + هـ) ، حا(هـ - ٢٧٠°) ، طا(٩٠° + هـ)

الحل

(١) المقدار = جتا(-١٥٠٠° + ٣٦٠°) حا(٦٠٠° - ٣٦٠°)
+ جتا(-١٢٠°) حا ٣٣٠° - قا(-٤٥°) طا(٩٠٠° - ٧٢٠°)

∴ المقدار = جتا ٦٠° حا ٢٤٠° + جتا ١٢٠° حا ٣٣٠° - قا ٣١٥° طا ١٨٠°
= جتا(١٨٠° + ٣٠°) حا(١٨٠° + ٦٠°) + جتا(١٨٠° - ٦٠°) حا(٣٦٠° - ٣٠°) - صفر
= (- جتا ٣٠° × - حا ٦٠°) + (- جتا ٦٠° × - حا ٣٠°)
= ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) + ($\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$) = $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{١}{٤}$ = ١

(٢) ∵ ١٣ جتا(٢٧٠ + هـ) = ٥
∴ ١٣ حا هـ = ٥

∴ حا هـ = $\frac{٥}{١٣}$

∴ قتا(٢٧٠° + هـ) = - قا هـ = - $\frac{١٣}{-١٢}$ = $\frac{١٣}{١٢}$

∴ حا(هـ - ٢٧٠°) = حا(٩٠° + هـ) = جتا هـ = $\frac{-١٢}{١٣}$

∴ طا(٩٠ + هـ) = - ظتا هـ = - $\frac{-١٢}{٥}$ = $\frac{١٢}{٥}$

مثال: (1) أثبت أن جتا ٧٥° جتا ١٥° − جا ٧٥° جا ١٥° = ٠

(2) إذا كان $\frac{\text{طا } \theta}{\text{ظتا } ٢\theta}$ = ١ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[أوجد قيمة θ ثم أوجد قيمة (جا(١٨٠° − ٣θ) جتا(٣٦٠° − ٢θ) جا(θ − ١٨٠°))

الحل

(1) ∵ الطرف الأيمن = جتا ٧٥° جتا ١٥° − جا ٧٥° جا ١٥°

= جتا ٧٥° جتا ١٥° − جتا(٩٠° − ٧٥°) جا(٩٠° − ١٥°)

= جتا ٧٥° جتا ١٥° − جتا ١٥° جتا ٧٥°

= صفر = الطرف الأيسر

(2) ∵ $\frac{\text{طا } \theta}{\text{ظتا } ٢\theta}$ = ١ ∴ طا θ = ظتا ٢θ حيث θ حادة

∴ θ + ٢θ = ٩٠° منها θ = ٣٠° ← أولاً

∵ المقدار = جا(١٨٠° − ٣θ) جتا(٣٦٠° − ٢θ) جا(θ − ١٨٠°)

= جا(١٨٠° − ٩٠°) جتا(٣٦٠° − ٦٠°) جا(− ١٥٠°)

= جا ٩٠° جتا ٣٠٠° جا ٢١٠°

= جا ٩٠ × جتا ٦٠° × − جا ٣٠°

= ١ × $\frac{١}{٢}$ × − $\frac{١}{٢}$ = − $\frac{١}{٤}$

* تدريب:

(1) $\frac{\text{طا}(٤٥° + \text{س})}{\text{ظتا}(٤٥° - \text{س})}$ = ...

(2) إذا كان جا سْ = جتا صْ فإن طا(سْ + صْ) = ...

أ/ علي حمدون

حل المعادلات المثلثية

*** أولاً : القانون العام لحل المعادلات التي على الصورة :**

حا أ = جتا ب أو قتا أ = قا ب أو طا أ = ظتا ب

(١) إذا كان حا أ = جتا ب فإن

أ ± ب = ٩٠° + ٣٦٠ ن أي أن أ ± ب = $\frac{\pi}{2}$ + ٢π ن

حيث ن عدد صحيح

* لاحظ أن (زاوية الجيب ± زاوية جيب التمام) = ٩٠° + ٣٦٠ ن

(٢) إذا كان قتا أ = قا ب فإن

أ ± ب = ٩٠° + ٣٦٠ ن أي أن أ ± ب = $\frac{\pi}{2}$ + ٢π ن

حيث ن عدد صحيح

* لاحظ أن (زاوية قاطع التمام ± زاوية القاطع) = $\frac{\pi}{2}$ + ٢π ن

(٣) إذا كان طا أ = ظتا ب فإن

أ + ب = ٩٠° + ١٨٠° ن أي أن أ + ب = $\frac{\pi}{2}$ + π ن

حيث ن عدد صحيح

أ ≠ (٢ن + ١) $\frac{\pi}{2}$ ، ب ≠ ن π

مثال

أوجد الحل العام للمعادلة

جتا ٢θ = حا ٤θ ثم أوجد قيم θ حيث $\theta \in$]٠، $\frac{\pi}{2}$[

الحل

∵ جتا ٢θ = حا ٤θ

∴ ٤θ ± ٢θ = ٩٠° + ٣٦٠ ن ومنها

إما ٤θ + ٢θ = ٩٠° + ٣٦٠ ن أو ٤θ − ٢θ = ٩٠° + ٣٦٠ ن

∴ ٦θ = ٩٠ + ٣٦٠ ن أو ٢θ = ٩٠° + ٣٦٠ ن

$\therefore \theta = 15^\circ + 60^\circ n$ أو $\theta = 45^\circ + 180^\circ n$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} n$ أو $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi n$

$\therefore$ الحل العام هو $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} n$ ، $\frac{\pi}{4} + \pi n$ ← أولاً

* ثانياً إيجاد قيم θ حيث $\theta \in]0 , \frac{\pi}{2}[$

$\because \theta = 15^\circ + 60^\circ n$ أو $\theta = 45^\circ + 180^\circ n$

بوضع $n = 0$	بوضع $n = 0$
$\therefore \theta = 15^\circ$	$\therefore \theta = 45^\circ$
بوضع $n = 1$	بوضع $n = 1$
$\therefore \theta = 15^\circ + 60^\circ = 75^\circ$	$\therefore \theta = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ$ مرفوض
بوضع $n = 2$	
$\therefore \theta = 15^\circ + 120^\circ = 135^\circ$ مرفوض	

$\therefore$ قيم θ هي 15° ، 45° ، 75°

مثال

أوجد الحل العام للمعادلة $\sin 2\theta = \cos \theta$

الحل

$\because \sin 2\theta = \cos \theta \quad \therefore 2\theta \pm \theta = 90^\circ + 360^\circ n$

إما $3\theta = 90^\circ + 360^\circ n$ أو $\theta = 90^\circ + 360^\circ n$

$\therefore \theta = 30^\circ + 120^\circ n$ أو $\theta = 90^\circ + 360^\circ n$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} n$ أو $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$\therefore$ الحل العام هو $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} n$ ، $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

* ثانياً: إيجاد قياس زاوية بمعلومية أحد نسبها المثلثية

مثال أوجد مجموعة حل المعادلة

٢ جا θ − ١ = ٠ حيث ٠ < θ < ٣٦٠°

الحل

∵ ٢ جا θ − ١ = ٠ ∴ ٢ جا θ = ١

∴ جا θ = $\frac{1}{2}$ موجبة

∴ θ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني

∴ θ = ٣٠° أو θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

∴ م.ح = {٣٠° ، ١٥٠°}

مثال أوجد مجموعة حل المعادلة

٢ جتا θ + $\sqrt{3}$ = ٠ حيث ٠ < θ < ٣٦٠°

الحل

∵ ٢ جتا θ = −$\sqrt{3}$ ∴ جتا θ = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ سالبة

∴ θ تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث

∴ θ = ١٨٠° − ٣٠° أو θ = ١٨٠° + ٣٠°

∴ θ = ١٥٠° أو θ = ٢١٠°

∴ م.ح = {١٥٠° ، ٢١٠°}

ملاحظات هامة

إذا كانت

جا θ = ص فإن θ = $جا^{-1}$ ص

على سبيل المثال إذا كانت جا θ = $\frac{1}{2}$ فإن θ = $جا^{-1}(\frac{1}{2})$

ومعنى الدالة $\theta = \text{جا}^{-1}(\frac{1}{2})$ هو أن
قياس الزاوية θ = قياس الزاوية التي جيبها يساوي $\frac{1}{2}$
$\therefore \theta = 30^\circ$ وقس على ذلك حيث θ حادة
$\theta = \text{ظا}^{-1}(1) \Leftarrow \therefore \theta = 45^\circ$
$\theta = \text{قا}^{-1}(2) \therefore \theta = \text{جتا}^{-1}(\frac{1}{2}) \therefore \theta = 60^\circ$

مثال

أوجد θ حيث $0 < \theta < 360^\circ$ حيث
(1) $\theta = \text{ظا}^{-1}(\sqrt{3})$ (2) $\theta = \text{قا}^{-1}(-\sqrt{2})$

الحل

(1) $\because \theta = \text{ظا}^{-1}(\sqrt{3}) \quad \because \sqrt{3}$ موجبة
$\therefore \theta$ تقع في الربع الأول أو الربع الثالث
$\therefore \theta = 60^\circ$ أو $\theta = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$
$\therefore$ م.ح = $\{60^\circ, 240^\circ\}$

(2) $\because \theta = \text{قا}^{-1}(-\sqrt{2})$
$\therefore \theta = \text{جتا}^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{2}}) \quad \therefore \frac{-1}{\sqrt{2}}$ سالبة
$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث
$\therefore \theta = 180^\circ - 45^\circ$ أو $\theta = 180^\circ + 45^\circ$
$\therefore$ م.ح = $\{135^\circ, 225^\circ\}$

مثال

أوجد θ حيث $0 < \theta < 180^\circ$ والتي تحقق
$\text{ظا}\,\theta = -2{,}1456$

الحل

$\because \theta = \text{ظا}^{-1}(-2{,}1456)$ سالبة
$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني أو الربع الرابع ← مرفوض لماذا

∴ $\theta = 180^\circ - 40.25^\circ = 65^\circ\ 19.75 = 144^\circ\ 59'\ 15''$

مثال

اذا قطع الضلع النهائي لزاوية قياسها θ في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة ب ا فاوجد ق (∠ θ) حيث $0 < \theta < 360^\circ$ اذا كانت

١- ب $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ ٢- ب $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ٣- ب $(0.6, -0.8)$

الحل

① ∵ ب = $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ ⟸ ∴ جتا $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، جا $\theta = \frac{1}{2}$

∴ $\theta = 30^\circ$

② ∵ ب = $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ∴ جتا $\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ سالبة

جا $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ موجبة

∴ θ تقع في الربع الثاني

∴ $\theta = 180 - 45^\circ = 135^\circ$

③ ب = $(0.6, -0.8)$ يترك للطالب

مثال

اذا جتا $(270 - \theta) = \frac{1}{2}$ فإن اصغر قياس موجب للزاوية θ يساوي ....

الحل

∵ جتا $(270 - \theta) = \frac{1}{2}$ ∴ − جا $\theta = \frac{1}{2}$ ∴ جا $\theta = \frac{-1}{2} < 0$

∴ θ تقع في الربع الثالث أو الرابع.

∵ θ اصغر قياس موجب ⟸ ∴ θ تقع في الربع الثالث فقط

∴ $\theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$

مثال إذا كانت س ∈]٠ ، ٢π[أوجد مجموعة حل المعادلة ① جاس جتاس = ٠

② جتا(٢س + ١٠°) = $\frac{1}{2}$

الحل

(١) ∵ جاس جتاس = ٠

إما جاس = ٠ ومنها س = ٠ ، س = ١٨٠°

أو جتاس = ٠ ومنها س = ٩٠° ، س = ٢٧٠°

∴ م.ح = {٠ ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠°}

(٢) ∵ جتا(٢س + ١٠°) = $\frac{1}{2}$ موجبة

∴ (٢س + ١٠°) تقع في الربع الأول أو الربع الرابع

∴ ٢س + ١٠° = ٦٠° أو ٢س + ١٠° = ٣٠٠°

∴ س = ٢٥° أو س = ١٤٥°

∴ م.ح = {٢٥° ، ١٤٥°}

مثال أوجد مجموعة حل المعادلة

٢جا²س + جاس − ١ = ٠ حيث س ∈ [٠ ، ٢π[

الحل

∵ ٢جا²س + جاس − ١ = ٠ ∴ (٢جاس − ١)(جاس + ١) = ٠

∴ إما جاس = $\frac{1}{2}$ ، أو جاس = −١

∴ س تقع في الربع الأول أو الربع الثاني

∴ هـ = ٣٠° ، هـ = ١٥٠°

∴ س = ٢٧٠° مرفوض

∴ م.ح = {٣٠° ، ١٥٠°}

تمارين

(١) طا ٤٠° = ظتا ......

(٢) قتا ٣٠° = قا ......

(٣) اذا كان جتا θ = حا ٢θ ، θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[فإن حا ٣θ = ...

(٤) اذا كانت θ قياس أصغر زاوية موجبة وكان حا θ = $-\frac{1}{2}$ فإن θ = ...

(٥) اذا كان حا α = جتا β فإن طا (α + β) = ...

(٦) حا ١٥٠° جتا (−٣٠٠°) + جتا ٩٣٠° ظتا ٤٠° = ...

(٧) اذا كانت θ زاوية حادة وكان حا θ − جتا θ = ٠ ، فإن θ = ...

(٨) اذا كانت θ زاوية حادة وكان قتا ($\frac{\pi}{2}$ − θ) = قا θ فإن θ = ...

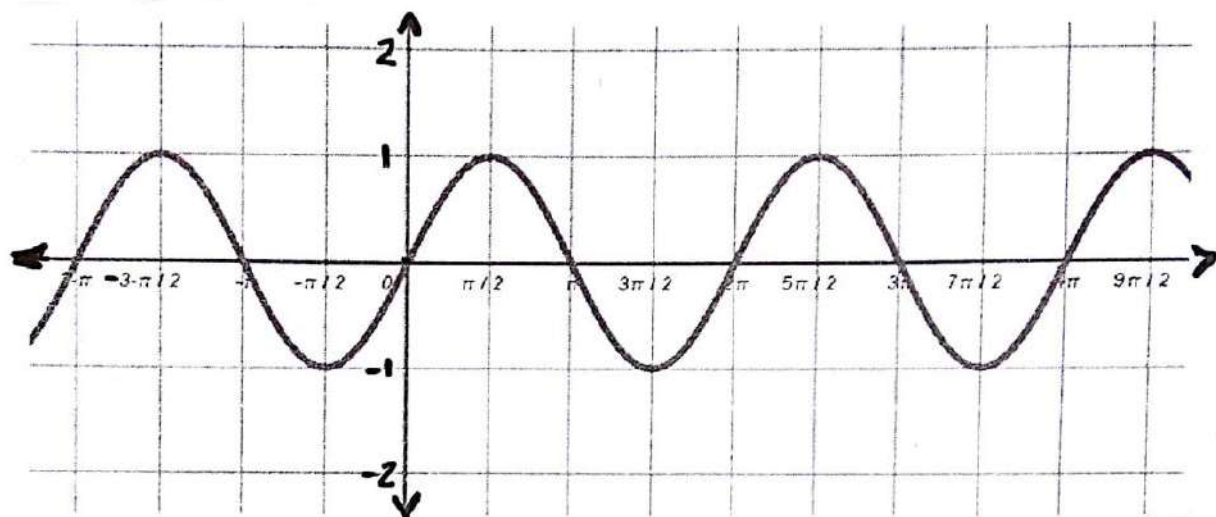
(٩) $\frac{\text{قا ١° × قا ٢° × قا ٣° × ...... × قا ٨٩°}}{\text{قتا ١° × قتا ٢° × قتا ٣° × ...... × قتا ٨٩°}}$ = ...

(١٠) اذا كان حا θ = $\frac{1}{3}$ وكانت ٩٠° ≥ θ ≥ ١٨٠° فإن θ = ...

(١١) اذا كان جتا ($\frac{3\pi}{2}$ − θ) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

حا ($\frac{\pi}{2}$ + θ) = $\frac{1}{2}$ فاوجد أصغر قياس موجب للزاوية θ

التمثيل البياني للدوال المثلثية

* أولاً دالة الجيب د(θ) = حا θ

* خواص دالة الجيب د(θ) = حا θ :-

١- مجال الدالة = ح

٢- القيمة العظمى للدالة = ١

وتبلغها الدالة عندما θ = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ن π حيث ن ∋ ص

٣- القيمة الصغرى للدالة = -١

وتبلغها الدالة عندما θ = $\frac{٣\pi}{٢}$ + ٢ن π حيث ن ∋ ص

٤- مدى الدالة في هذه الحالة = [-١ ، ١]

٥- الدالة دورية ودورتها = ٢π

* الصورة العامة لدالة الجيب وخواصها :-

د(س) = أ حا ب س حيث أ ≠ ٠

١- مجال الدالة = ح

٢- القيمة العظمى للدالة = أ وتبلغها الدالة

عندما س = $\frac{\pi}{2ب}$ + $2ن\pi$ حيث ن ∋ ص
حيث أ > ٠.

٣- القيمة الصغرى للدالة = -أ
وتبلغها الدالة عندما س = $\frac{3\pi}{2ب}$ + $2ن\pi$ حيث ن ∋ ص
حيث أ > ٠.

٤- مدى الدالة = [-أ ، أ] حيث أ > ٠.

٥- الدالة دورية ودورتها = $\frac{2\pi}{|ب|}$

٦- عدد مرات تقاطع منحنى الدالة د(س) = أ حا ب س
مع محور السينات = ٢ب + ١ في الفترة [٠ ، ٢π]
= ٢ب في الفترة [٠ ، ٢π[
= ٢ب - ١ " "]٠ ، ٢π[

مثال

١- مدى الدالة د(س) = ٣ حا س يساوي ....
٢- مدى الدالة د(س) = حا ٣س يساوي ....
٣- مدى الدالة د(س) = ٥ حا ٢س يساوي ....
٤- القيمة العظمى للدالة د(س) = -٢ حا ٧س تساوي ....

الحل

١- مدى الدالة د(س) = ٣ حا س يساوي [-٣ ، ٣]
٢- " " د(س) = حا ٣س يساوي [-١ ، ١]
٣- مدى الدالة د(س) = ٥ حا ٢س يساوي [-٥ ، ٥]
٤- القيمة العظمى للدالة د(س) = -٢ حا ٧س
تساوي ٢

مثال

١- الدالة د(س) = حا ٣س تكون قيمة عظمى عندما س = ... وتكون قيمة صغرى عندما س = ...

٢- الدالة د(س) = ٢ حا ٥س دورتها تساوي ......

٣- عدد مرات تقاطع منحنى الدالة د(س) = ٥ حا ٣س مع محور السينات في الفترة $[0 ، 2\pi]$ يساوي ......

٤- عدد حلول المعادلة حا ٦س = ٠ في الفترة $[0 ، 2\pi]$ يساوي ......

الحل

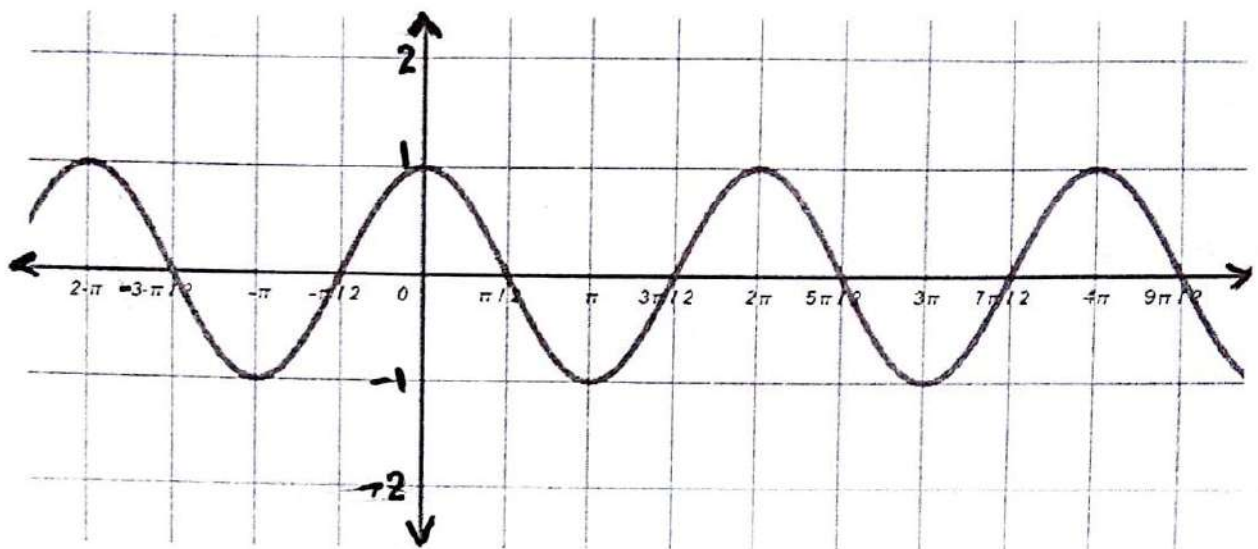
١- الدالة د(س) = حا ٣س تكون قيمة عظمى عندما
س = $\frac{\pi}{2\times3} + 2\pi$ن ∴ س = $\frac{\pi}{6} + 2\pi$ن حيث ن ∈ ص

وتكون قيمة صغرى عندما س = $\frac{3\pi}{2\times3} + 2\pi$ن = $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ن

٢- الدالة د(س) = ٢ حا ٥س دورتها تساوي $\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$

٣- عدد مرات تقاطع منحنى الدالة د(س) = ٥ حا ٣س مع محور السينات في الفترة $[0 ، 2\pi]$ يساوي $2\times3 + 1 = 7$ مرات

٤- عدد حلول المعادلة حا ٦س = ٠ يساوي عدد مرات تقاطع منحنى الدالة د(س) = حا ٦س مع محور السينات في $[0 ، 2\pi]$ يساوي $6\times2 + 1 = 13$ حلاً

* ثانياً دالة جيب التمام د(θ) = جتا θ

* خواص دالة جيب التمام د(θ) = جتا θ

١- مجال الدالة = ح

٢- القيمة العظمى للدالة = ١

وتبلغها الدالة عندما θ = ٢ن π حيث ن ∈ ص

٣- القيمة الصغرى للدالة = -١

وتبلغها الدالة عندما θ = π + ٢ن π حيث ن ∈ ص

مدى الدالة = [-١، ١]

٤- الدالة دورية ودورتها = ٢ π

* الصورة العامة لدالة جيب التمام وخواصها :-

د(س) = أ جتا ب س حيث أ ≠ ٠

١- مجال الدالة = ح

٢- القيمة العظمى للدالة = أ وتبلغها الدالة

عندما س = $\frac{٢ن π}{ب}$ + ٢ن π حيث ن ∈ ص، أ > ٠

٣- القيمة الصغرى للدالة = -أ وتبلغها الدالة عندما س = $\frac{\pi}{ب}$ + ٢نπ حيث ن ∈ ص ، أ > ٠

٤- مدى الدالة = [-أ ، أ] حيث أ > ٠
ومداها = [أ ، -أ] اذا كانت أ < ٠

٥- الدالة دورية ودورتها = $\frac{2\pi}{|ب|}$

٦- عدد مرات تقاطع منحنى الدالة د(س) = أ جتا ب س مع محور السينات = ٢ ب في الفترة [٠ ، ٢π]

٧- عدد حلول المعادلة د(س) = ٠
اي أن أ جتا ب س = ٠ يساوي ٢ ب في الفترة [٠ ، ٢π]

مثال

١- اذا كانت د(هـ) = جتا ٤ هـ فان مداها يساوي ....
٢- القيمة العظمى للدالة د(س) = ٣ جا س تساوي ....
٣- اذا كانت م = ٢ جتا س - ١ فان م ∈ ....
٤- الدالة د(س) = جتا أ س دالة دورية دورتها $\frac{\pi}{2}$ فان أ = ...

الحل

١- المدى = [-١ ، ١]
٢- القيمة الصغرى للدالة = -٣
٣- ∵ ٢ جتا س = م + ١ ∴ جتا س = $\frac{م+1}{2}$
∵ -١ ≤ جتا س ≤ ١ ∴ -١ ≤ $\frac{م+1}{2}$ ≤ ١ ∴ م ∈ [-٣ ، ١]
٤- ∵ $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{أ}$ ∴ أ = ٤

تمارين

(١) مدى الدالة د(θ) = جا θ − ١ يساوي ....

(٢) الدالة د(θ) = جا $\frac{1}{2}$ س دالة دورية دورتها ....

(٣) إذا كانت $\frac{٢ - جتا س}{٥}$ = م فإن م ∈ ....

(٤) عدد المرات التي يقطع فيها منحنى الدالة د(س) حيث د(س) = ٣ جتا ٢س محور السينات = ...

(٥) عدد المرات التي تصل فيها الدالة د(س) = جا س + ٢ إلى قيمتها العظمى في الفترة [٠، ٢π] يساوي ....

(٦) أقصى قيمة للدالة د(س) = جا($\frac{\pi}{3}$ + س) تبلغها عندما س = ...

(٧) عدد حلول المعادلة جتا س = ٠ في الفترة [٠، ٨π] يساوي ....

(٨) إذا كانت د(س) = أ جتا ب س حيث أ > ٠، دالة دورية دورتها $\frac{\pi}{2}$ ومداها [−١، ١] فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

مثال عين أكبر قياس سالب للزوايا الآتية :

(١) ١٢٠° (٢) -٤٥٠° (٣) -٩٠٠°

الحل

(١) أكبر قياس سالب للزاوية $١٢٠^\circ = ١٢٠^\circ - ٣٦٠^\circ = -٢٤٠^\circ$

(٢) أكبر قياس سالب للزاوية $-٤٥٠^\circ = -٤٥٠^\circ + ٣٦٠^\circ = -٩٠^\circ$

(٣) أكبر قياس سالب للزاوية $-٩٠٠^\circ = -٩٠٠^\circ + ٣٦٠ \times ٢ = -١٨٠^\circ$

مثال أكمل ما يأتي

(١) اذا كانت θ هو أصغر قياس موجب لزاوية موجهة فإن أكبر قياس سالب لها يساوي ....

(٢) اذا كانت θ هو أكبر قياس سالب لزاوية موجهة فإن أصغر قياس موجب لها يساوي ....

(٣) اذا كانت $\theta = ٧م$ وكانت θ زاوية ربعية فإن أقل قيمة للعدد م = ... حيث م > ٠

(٤) اذا كانت م ، ن قياسا زاويتين وكان م = ن + ن × ٣٦٠° حيث ن ∈ ص زاوية م .... زاوية ب

(٥) الزاوية التي قياسها $٤٥^\circ + (٤ن + ١) \times ٩٠^\circ$ تقع في الربع ....

الحل

(١) $\theta - ٣٦٠^\circ$ (٢) $\theta + ٣٦٠^\circ$ (٣) م = ٩٠°

(٤) ∵ م = ن + ن × ٣٦٠° حيث ن ∈ ص

∴ زاوية م تكافئ زاوية ب

(٥) ∵ $\theta = ٤٥^\circ + (٤ن + ١) \times ٩٠^\circ$

∴ $\theta = ٤٥^\circ + ٤ن \times ٩٠^\circ + ٩٠^\circ$

∴ $\theta = ١٣٥^\circ + ن \times ٣٦٠^\circ$ ∴ $\theta = ١٣٥^\circ$ أصغر قياس موجب

∴ θ تقع في الربع الثاني

الشرح الوافى

الهندسة

الصف الاول الثانوى

الترم الاول

اعداد الاستاذ/ على حمدون
معلم اول (أ) بمعهد بنى عدى الثانوى بنين

تشابه المضلعات

* تعريف:

يقال لمضلعين م١ ، م٢ لهما نفس العدد من الاضلاع أنهما متشابهين اذا تحقق الشرطين الآتيين معاً:

(١) تساوي قياسات الزوايا المتناظرة

(٢) تناسب أطوال الاضلاع المتناظرة

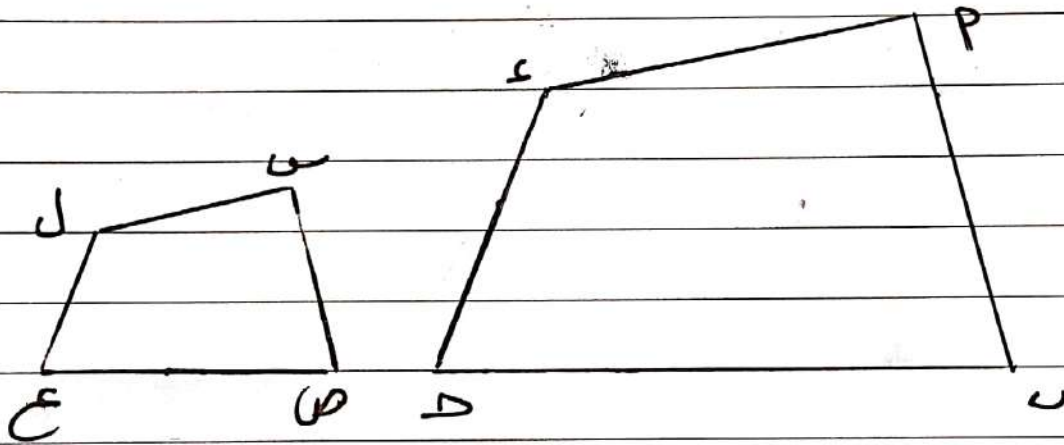
وفي هذه الحالة يكون المضلع م١ يشابه المضلع م٢

ويعبر عنه رياضياً بالصورة م١ ~ م٢

فإذا كان ق(أ̂) = ق(س̂) ، ق(ب̂) = ق(ص̂)

ق(جـ̂) = ق(ع̂) ، ق(ء̂) = ق(ل̂)

وكان $\frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ل س}}$

فإن المضلع أ ب جـ ء ~ المضلع س ص ع ل

ولابد عند كتابة المضلعين المتشابهين أن تكتب بنفس ترتيب رؤوسها المتناظرة

معامل التشابه

معامل التشابه هو النسبة بين طولي ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين ويرمز له بالرمز ك

أي أنه اذا كان المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل فإن

$$\frac{أب}{س ص} = \frac{ب حـ}{ص ع} = \frac{حـ ء}{ع ل} = \frac{ء أ}{ل س} = ك$$ معامل التشابه

ويطلق ايضاً على معامل التشابه نسبة التشابه أو نسبة التكبير أو التصغير حيث ك > صفر

ملاحظات

* اذا كان ك معامل تشابه المضلع $م_1$ للمضلع $م_2$ فإن

(1) اذا كان ك > 1 فإن المضلع $م_1$ هو تكبير للمضلع $م_2$

(2) " " $0 < ك < 1$ فإن المضلع $م_1$ هو تصغير للمضلع $م_2$

(3) " " ك = 1 فإن المضلع $م_1$ يطابق المضلع $م_2$

* المضلعان المشابهان لمضلع ثالث متشابهان
* المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين والعكس غير صحيح
* المضلعات المنتظمة التي لها نفس عدد الأضلاع تكون متشابهة

مثال

في الشكل المقابل

اذا كان

△ أ ء هـ ~ △ أ ب حـ

ب حـ = 6 سم ، أ هـ = 5 سم

أ ء = 4 سم ، ء هـ = 3 سم

(1) اوجد طول حـ هـ ، قيمة س

(٢) أوجد معامل تشابه Δ أ ء هـ للمثلث أ ب جـ

(٣) أوجد ق(∠ أ ء هـ) وسه ثم اثبت أن $\overline{ب جـ} \parallel \overline{ء هـ}$

الحل

∵ Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب جـ ∴ $\frac{أء}{أب} = \frac{ءهـ}{بجـ} = \frac{هـأ}{جـأ}$ = معامل التشابه

∴ $\frac{٤}{أب} = \frac{٣}{٦} = \frac{٥}{جـأ}$ ∴ $\frac{٤}{أب} = \frac{١}{٢} = \frac{٥}{جـأ}$ = ك منها

(١) معامل التشابه بين Δ أ ء هـ للمثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$

(٢) ∵ $\frac{١}{٢} = \frac{٥}{جـأ}$ ∵ ضرب الطرفين = ضرب الوسطين

∴ أجـ = ١٠ سم ∴ أهـ + هـجـ = ١٠

∴ ٥ + هـجـ = ١٠ منها هـجـ = ٥ سم

∵ $\frac{٤}{أب} = \frac{١}{٢}$ ∴ أب = ٨ سم منها س + ١ = ٤ ∴ س = ٣ سم

مثال

أ ب جـ مثلث فيه أب = ٤ سم، ب جـ = ٦ سم، أجـ = ٨ سم أوجد أطوال مثلث آخر مشابه له إذا كان:

(١) معامل التشابه = ٢ (٢) معامل التشابه = $\frac{١}{٢}$

الحل

(١) ∵ معامل التشابه = ٢ > ١

∴ المثلث الأول المطلوب تكبير للمثلث الثاني المعلوم أ ب جـ

ونفرض أن Δ س ص ع ~ Δ أ ب جـ

∴ $\frac{س ص}{أب} = \frac{ص ع}{ب جـ} = \frac{ع س}{جـأ} = ٢$ ∴ $\frac{س ص}{٤} = \frac{ص ع}{٦} = \frac{ع س}{٨} = ٢$

∴ س ص = ٨ سم، ص ع = ١٢ سم، ع س = ١٦ سم

(ع) ∵ معامل التشابه $= \frac{1}{2} < 1$

∴ Δ س ص ع تصغير للمثلث أ ب جـ

∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ع س}}{\text{جـ أ}} = \frac{1}{2}$ ∴ $\frac{\text{س ص}}{4} = \frac{\text{ص ع}}{6} = \frac{\text{ع س}}{8} = \frac{1}{2}$

∴ س ص = ٢ سم ، ص ع = ٣ سم ، ع س = ٤ سم

مثال

إذا كان المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل

فإن $\frac{\text{أ ب} + \text{ب جـ} + \text{جـ د} + \text{د أ}}{\text{س ص} + \text{ص ع} + \text{ع ل} + \text{ل س}} = \text{.......}$

الحل

∵ المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{د أ}}{\text{ل س}}$ وباستخدام خواص التناسب

* الخاصية: $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}}$ = كل نسبة

∴ $\frac{\text{أ ب} + \text{ب جـ} + \text{جـ د} + \text{د أ}}{\text{س ص} + \text{ص ع} + \text{ع ل} + \text{ل س}}$ = كل نسبة = معامل التشابه

ومن هذا المثال نستنتج القاعدة التالية

النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين

النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين تساوي النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما تساوي معامل التشابه

مثال : مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ سنتيمتر والآخر محيطه ٤٨ سم

أوجد أطوال أضلاع المضلع الثاني

الحل

∵ المضلعان متشابهان ، محيط المضلع الأول = ٣ + ٥ + ٦ + ٨ + ١٠

∴ محيط المضلع الأول = ٣٢

محيط المضلع الثاني = ٤٨

وبفرض أن المضلع الثاني هو أ ب جـ د هـ

∴ $\frac{\text{محيط المضلع الأول}}{\text{محيط المضلع الثاني}} = \frac{٣}{أب} = \frac{٥}{ب جـ} = \frac{٦}{جـ د} = \frac{٨}{د هـ} = \frac{١٠}{هـ أ}$

∴ $\frac{٣٢}{٤٨} = \frac{٣}{أب} = \frac{٥}{ب جـ} = \frac{٦}{جـ د} = \frac{٨}{د هـ} = \frac{١٠}{هـ أ}$

∴ $\frac{٢}{٣} = \frac{٣}{أب} = \frac{٥}{ب جـ} = \frac{٦}{جـ د} = \frac{٨}{د هـ} = \frac{١٠}{هـ أ}$ منها

أ ب = $\frac{٣ \times ٣}{٢}$ = ٤,٥ سم ب جـ = $\frac{٣ \times ٥}{٢}$ = ٧,٥ سم

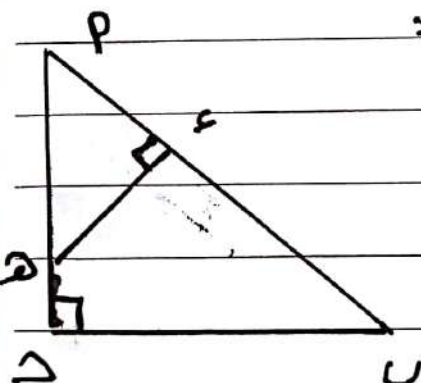
جـ د = $\frac{٣ \times ٦}{٢}$ = ٩ سم د هـ = $\frac{٣ \times ٨}{٢}$ = ١٢ سم هـ أ = $\frac{٣ \times ١٠}{٢}$ = ١٥ سم

∴ أطوال أضلاع المضلع الثاني هي ٤,٥ ، ٧,٥ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ سنتيمتر

* تدريب : في الشكل المقابل إذا كان

△ أ ب جـ ~ △ أ هـ ء وكان

ق (أ̂ ب) = ٢ س − ١٠

ق (أ هـ̂ ء) = س + ٢٠ فإن ق (أ̂) = ...

مثال مستطيلان متشابهان إذا كان أحدهما بعداه س ، ص والآخر بعداه ل ، ع على الترتيب فأكمل :

(١) س / .... = ... / ع   (٢) (س + ل) / ل = ... / ....

الحل

(١) ∵ المستطيلان متشابهان ∴ س / ل = ص / ع

(٢) ∵ س / ل = ص / ع وباستخدام خواص التناسب ∴ (س + ل) / ل = (ص + ع) / ع

مثال مستطيل بعداه ١٠ سم ، ٦ سم أوجد محيط ومساحة مستطيل آخر مشابه له إذا كان :

(١) معامل التشابه = ٣   (٢) معامل التشابه = ٠,٤

الحل

بفرض أن بعدي المستطيل المطلوب المشابه للمستطيل المعلوم هما س ، ص

(١) ∵ معامل التشابه = ٣ > ١

∴ المستطيل المطلوب تكبير للمستطيل المعلوم

∴ س / ١٠ = ص / ٦ = ٣   منها س = ٣٠ سم

ص = ١٨ سم

∴ محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض) = ٢ (س + ص) = ٢ × ٤٨ = ٩٦ سم

∴ مساحة المستطيل = الطول × العرض = س × ص = ٣٠ × ١٨ = ٥٤٠ سم²

(٢) ∵ معامل التشابه = ٠,٤ < ١ ∴ م٢ تصغير للمضلع م١

∴ س / ١٠ = ص / ٦ = ٤ / ١٠   منها س = ٤ سم ، ص = ٢,٤ سم

∴ محيط المستطيل = ٢ (٤ + ٢,٤) = ٢ × ٦,٤ = ١٣,٨ سم

مساحة المستطيل = ٤ × ٢,٤ = ٩,٦ سم²

تمارين

(١) أكمل ما يأتي :

أ- يتشابه المضلعان اذا تحقق .... و ....

ب- المضلعان المتشابهان لمضلع ثالث يكونان ....

جـ- اذا كان ٤ سم ، ١٢ سم طولي ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين فإن النسبة بين محيطيهما تساوي ....

(٢) مستطيلان متشابهان بعدا المستطيل الأول ٨ سم ، ١٢ سم ومحيط المستطيل الثاني ٦٠ سم فإن مساحة المستطيل الثاني = ...

(٣) مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٤ فإذا كان محيط الأصغر ١٥ سم فإن محيط الأكبر ....

(٤) اذا كان المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل فإن

(أ) $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{....}}{\text{ص ع}}$ (ب) أ ب × ع ل = س ص × ....

(جـ) $\frac{\text{ب جـ} + \text{ص ع}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{....} + \text{ل س}}{\text{ل س}}$

(د) $\frac{\text{محيط المضلع ....}}{\text{محيط المضلع ....}} = \frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}}$

تشابه المثلثات

هناك ثلاثة حالات لتشابه المثلثات :-

الحالة الاولى

يتشابه المثلثان إذا طابقت زاويتان في أحد المثلثين تناظرها في المثلث الاخر .

بمعنى آخر :-

يتشابه المثلثان اذا تساوت قياسا زاويتين في أحدها تناظرها في المثلث الآخر

مثال

إذا كان قياس زاويتين في مثلث ٥٠°، ٦٠° وقياس زاويتين في مثلث آخر ٦٠°، ٧٠° هل المثلثان متشابهان

الحل

∵ قياس الزاوية الثالثة في المثلث الاول = ١٨٠° − (٦٠° + ٥٠°) = ٧٠°

∴ قياسات زوايا المثلث الاول هي ٥٠°، ٦٠°، ٧٠°

∵ قياسات زوايا المثلث الثاني هي ٦٠°، ٧٠°، ......

∴ المثلثان يتحقق فيهما تطابق (تساوي) زاويتان في احدهما مع زاويتان في المثلث الاخر

∴ المثلثان متشابهان

مثال

في الشكل المقابل

اذا كان ق(∠أ هـ ء) = ق(∠أ ب جـ)

(١) أثبت أن △أ ب جـ ~ △أ هـ ء

(٢) أوجد طول هـ ء ، ء ب

الحل

∵ $\triangle$ أ ب جـ ، $\triangle$ أ هـ د فيهما

(١) ق(أ ب̂ جـ) = ق(أ هـ̂ د) ← ①

(٢) $\angle$ أ مشتركة ← ②

من ①، ② ينتج أن $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ أ هـ د ← أولاً

ثانياً: ∵ $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ أ هـ د

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ د}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ د}}$ ∴ $\frac{\text{أب}}{٦} = \frac{١٥}{\text{هـ د}} = \frac{١٠}{٤}$

∴ $\frac{\text{أب}}{٦} = \frac{١٥}{\text{هـ د}} = \frac{٥}{٢}$ فيها $\frac{١٥}{\text{هـ د}} = \frac{٥}{٢}$

∴ هـ د = $\frac{١٥ \times ٢}{٥}$ ∴ هـ د = ٦ سم ← I

∵ $\frac{\text{أب}}{٦} = \frac{٥}{٢}$ ∴ أب = $\frac{٦ \times ٥}{٢}$ ∴ أب = ١٥ سم

∵ أد = ٤ سم ∴ د ب = أب − أد = ١٥ − ٤ ⇐ ∴ د ب = ١١ سم

ملاحظات هامة

(١) يتشابه المثلثان القائما الزاوية اذا ساوى قياس زاوية حادة في احدهما قياس الزاوية المناظرة لها في المثلث الآخر

(٢) يتشابه المثلثان المتساويا الساقين اذا ساوى قياس أحد زاويتي القاعدة في احدهما نظائرها في المثلث الآخر أو اذا ساوى قياس زاوية الرأس في احدهما نظائرها في المثلث الآخر

مثال

في الشكل المقابل

(١) أثبت أن Δ أ ب جـ ~ Δ ء هـ جـ

(٢) أوجد قيمة س   (٣) أوجد طول جـ ء

الحل

(١) ∵ Δ أ ب جـ ، Δ ء هـ جـ قائمي الزاوية فيهما

ق(∠أ جـ ب) = ق(∠ء جـ هـ) بالتقابل بالرأس

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ ء هـ جـ ← أولاً

(٢) ∵ Δ أ ب جـ ~ Δ ء هـ جـ ∴ أب / ء هـ = ب جـ / هـ جـ = أ جـ / ء جـ

∴ ٦ / ٣ = (٣س − ١) / (س + ١) = أ جـ / ء جـ   منها (٣س − ١) / (س + ١) = ٦ / ٣

∴ (٣س − ١) / (س + ١) = ٢ ← ∴ ٣س − ١ = ٢س + ٢

∴ س = ٣ ← ثانياً

(٣) ∵ Δ ء هـ جـ قائم الزاوية في هـ فيه

ء هـ = ٣ سم معطى

جـ هـ = س + ١ حيث س = ٣ ∴ جـ هـ = ٤ سم

باستخدام نظرية فيثاغورث

(جـ ء)² = (جـ هـ)² + (ء هـ)² ∴ (جـ ء)² = ١٦ + ٩

∴ (جـ ء)² = ٢٥ منها جـ ء = ٥ سم

نتائج هامة

* نتيجة (١) :-

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو يقطع المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلي

مثال

في الشكل المقابل

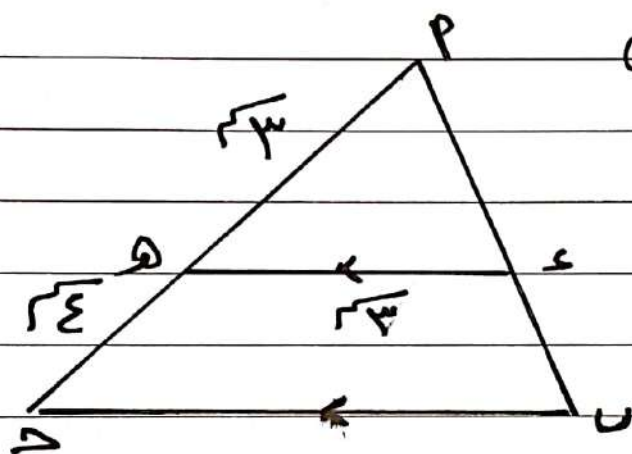
دهـ // بجـ

أهـ = هـ د = ٣ سم

جـ هـ = ٤ سم

أوجد طول بجـ

الحل

∵ △ أ ب جـ فيه دهـ // بجـ

∴ △ أ د هـ ~ △ أ ب جـ (نتيجة)

ومن التشابه ينتج أن $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}}$

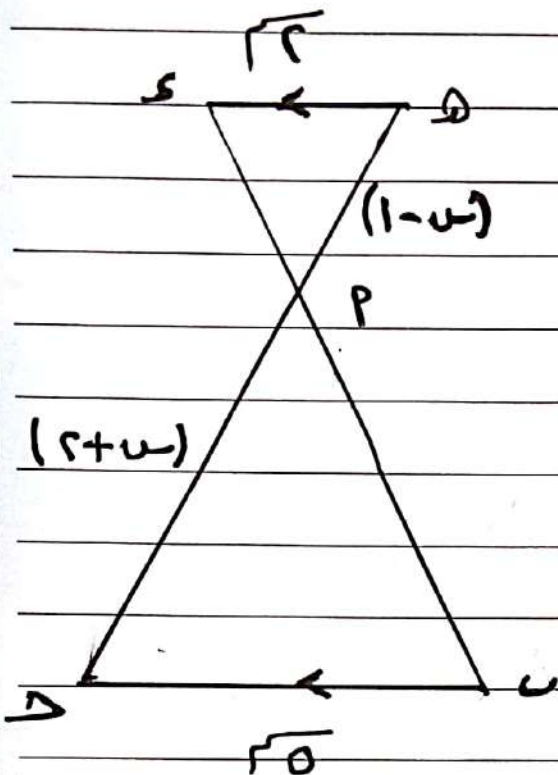
∴ $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{٣}{\text{بجـ}} = \frac{٣}{٧}$ منها $\frac{٣}{\text{بجـ}} = \frac{٣}{٧}$

∴ بجـ = $\frac{٧ \times ٣}{٣}$ ∴ بجـ = ٧ سم

* تدريب :-

حاول اثبات نتيجة (١)

مثال

في الشكل المقابل

هـ ء // ب حـ

هـ ء = ٢سم ، ب حـ = ٥سم

أ هـ = (س - ١) سم

أ حـ = (س + ٢) سم

(١) أثبت أن

Δ أ ب حـ ~ Δ أ ء هـ

(٢) أوجد قيمة س

الحل

(١) هـ ء // ب حـ ∴ Δ أ ب حـ ، Δ أ ء هـ فيهما

١- ق(ب̂) = ق(ء̂) بالتبادل

٢- ق(حـ̂) = ق(هـ̂) بالتبادل

∴ من ① ، ② ينتج أن Δ أ ب حـ ~ Δ أ ء هـ ← أولاً

* ملحوظة :

يمكن إثبات التشابه مباشرة من خلال النتيجة (١)

كالتالي : ∵ هـ ء // ب حـ ∴ Δ أ ب حـ ~ Δ أ ء هـ (نتيجة)

(٢) ∵ Δ أ ب حـ ~ Δ أ ء هـ ∴ أب / أء = ب حـ / ء هـ = أ حـ / أ هـ

∴ أب / أء = ٥ / ٢ = (س+٢) / (س-١) منها (س+٢) / (س-١) = ٥ / ٢

∴ ٢س + ٤ = ٥س - ٥ ∴ ٣س = ٩

∴ س = ٣ سم

* نتيجة (٢) :-

إذا رسم من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية عموداً على الوتر انقسم المثلث الى مثلثين متشابهين وكلاهما يشابه المثلث الاصلي

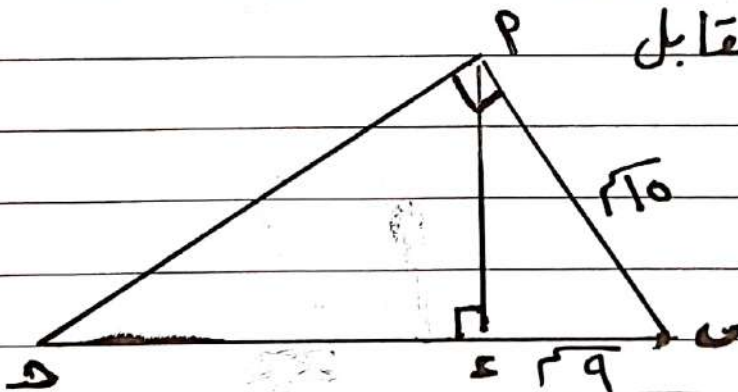
أي أنه اذا كان

△ أ ب جـ قائم الزاوية

في أ ، أء ⊥ ب جـ

فإن

△ أ ب جـ ~ △ ء أ جـ ~ △ ء ب أ

ومن ذلك التشابه ينتج :

(١) (أ ب)^2 = ب ء × ب جـ

(٢) (أ جـ)^2 = جـ ء × جـ ب

(٣) (أ ء)^2 = ب ء × ء جـ

(٤) أ ب × أ جـ = أ ء × ب جـ

مثال

في الشكل المقابل

أ ب = ١٥ سم

ء جـ = ١٦ سم

أوجد طول كلاً من ب ء ، أ ء ، أ جـ

الحل

∵ △ أ ب جـ قائم الزاوية في أ ، أ ء ⊥ ب جـ

∴ (أ ب)^2 = ب ء × ب جـ   ∴ (١٥)^2 = ٩ × ب جـ

∴ ٢٢٥ = ٩ ب حـ منها ب حـ = ٢٥ سم ← أولاً

∵ △ أ ب ء قائم الزاوية في ء

∴ (أ ء)^2 = (أ ب)^2 − (ب ء)^2 ∴ (أ ء)^2 = ٢٢٥ − ٨١

∴ (أ ء)^2 = ١٤٤ منها أ ء = ١٢ سم ← ثانياً

* حل آخر :

∵ (أ ء)^2 = ب ء × ء حـ ∴ (أ ء)^2 = ٩ × ١٦

∴ أ ء = ٣ × ٤ = ١٢ سم

ثالثاً : ∵ أ ب × أ حـ = أ ء × ب حـ

∴ ١٥ × أ حـ = ١٢ × ٢٥

∴ أ حـ = $\frac{١٢ × ٢٥}{١٥}$ منها أ حـ = ٢٠ سم

مثال

في الشكلين الآتيين أوجد قيمة س العددية

الحل

في شكل (١)

∵ س^2 = أ ء × ء حـ ∴ س^2 = ١٨ × ٨ = ١٤٤

∴ س = ١٢ سم

في شكل (٢)

∵ $(أهـ)^2$ = ب هـ × هـ د ∴ ٣٦ = ٤ (٢س + ١)

∴ ٣٦ = ٨س + ٤ ∴ ٨س = ٣٢ ∴ س = ٤ سم

مثال

في الشكل المقابل

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ

، أ د ⊥ ب حـ

د هـ ⊥ أ ب ، د و ⊥ أ حـ

أثبت أن :

(١) Δ أ د هـ ~ Δ حـ د و

(٢) مساحة المستطيل أ هـ د و = √(أ هـ × هـ ب × أ و × و حـ)

الحل

(١) ∵ من هندسة الشكل ∠ د أ هـ تتمم ∠ د أ حـ ①

∠ د حـ و تتمم ∠ د أ حـ ②

من ① ، ② ينتج أن ق(∠ د أ هـ) = ق(∠ د حـ و)

∴ Δ أ د هـ ، Δ حـ د و القائمتا الزاوية فيهما

① ق(∠ د أ هـ) = ق(∠ د حـ و)

∴ Δ أ د هـ ~ Δ حـ د و ← أولاً

(٢) ∵ $(د هـ)^2$ = أ هـ × هـ ب ∴ د هـ = √(أ هـ × هـ ب)

∵ $(د و)^2$ = أ و × و حـ ∴ د و = √(أ و × و حـ)

∵ مساحة المستطيل أ هـ د و = د هـ × د هـ

∴ مساحة المستطيل أ هـ د و = √(أ هـ × هـ ب × أ و × و حـ)

مثال: في الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه أب = أجـ

رسم $\overleftrightarrow{\text{أد}} \perp \overline{\text{أب}}$ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في د

أثبت أن

٢(أب)^2 = ب د × ب جـ

الحل

العمل: نرسم $\overleftrightarrow{\text{أهـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ويقطعه في هـ

∵ Δ أ ب د قائم الزاوية فيه أ

$\overline{\text{أهـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$

∴ (أب)^2 = ب هـ × ب د   بضرب المعادلة × ٢ ينتج

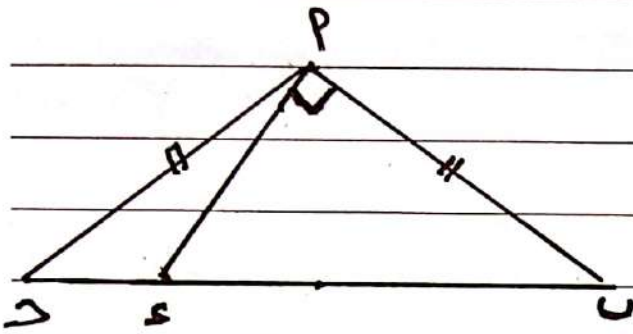
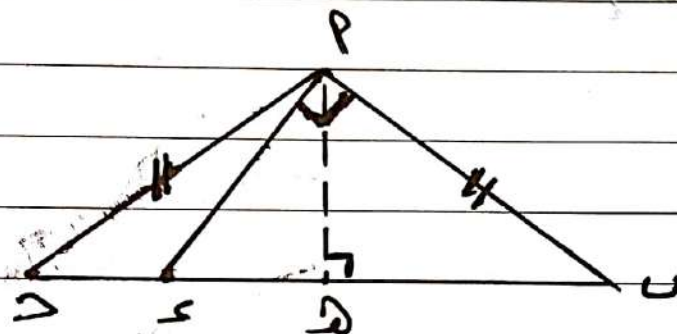
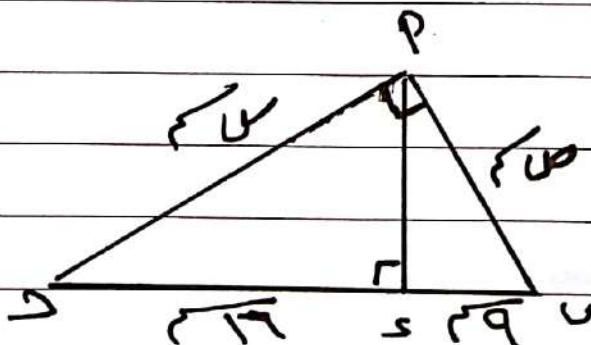
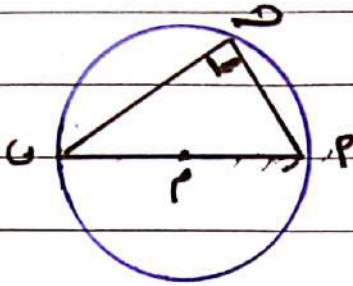
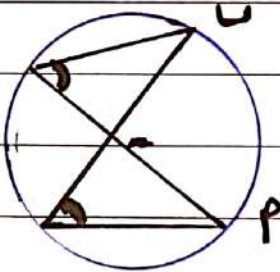
∴ ٢(أب)^2 = ٢ب هـ × ب د ← (١)

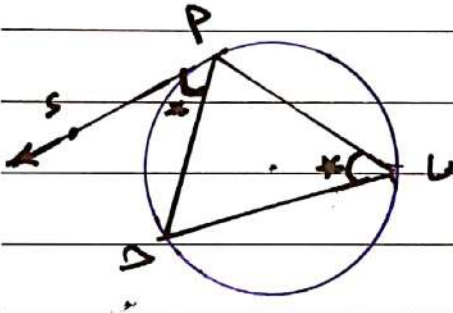
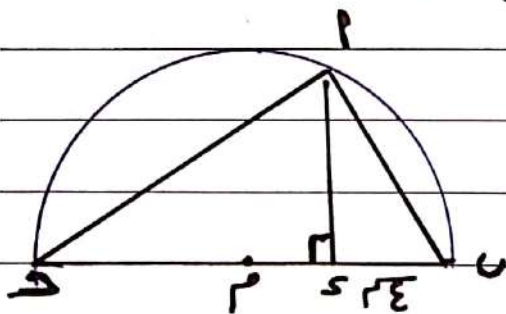
∵ Δ أ ب جـ متساوي الساقين فيه أهـ ⊥ القاعدة ب جـ

∴ ب هـ = هـ جـ   ∴ ٢ب هـ = ب جـ   بالتعويض في (١)

∴ ٢(أب)^2 = ب جـ × ب د

* تدريب: في الشكل المقابل

ص/س = ...

تذكر أن

(١) قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة يساوي ٩٠°

(٢) الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في دائرة واحدة تكون متساوية في القياس

(٣) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على وتر التماس من الجهة الأخرى التي لا تقع فيها الزاوية المماسية

(٤) في الشكل الرباعي الدائري يكون :
- كل زاويتين متقابلتين متكاملتان
- قياس الزاوية الخارجة عند أي رأس يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس

مثال

في الشكل المقابل
أ ب جـ مثلث مرسوم في نصف دائرة
طول نصف قطرها ٥ سم
ب د = ٤ سم ، أ د ⊥ ب جـ
أوجد طول كل من أ ب ، أ د

الحل

∵ ∠ أ زاوية محيطية مرسومة في نصف دائرة

∴ ق($\hat{أ}$) = ٩٠° ∴ △ أ ب جـ قائم الزاوية فيه $\overline{أد} \perp \overline{بجـ}$

∴ (أب)² = ب د × ب جـ ∴ (أب)² = ٤ × ١٠

∴ أب = $\sqrt{٤٠}$ منها أب = ٢$\sqrt{١٠}$ سم أولاً

ثانياً: ∵ △ أ ب جـ قائم في أ فيه $\overline{أد} \perp \overline{بجـ}$

∴ (أد)² = ب د × د جـ ∴ (أد)² = ٤ × ٦

∴ أد = ٢$\sqrt{٦}$ سم ثانياً

مثال

في الشكل المقابل

أثبت أن

△ أ ب هـ ~ △ د جـ هـ

ثم أوجد طول $\overline{بد}$

الحل

∵ △ أ ب هـ ، △ د جـ هـ فيهما

(١) ق($\hat{أ}$) = ق($\hat{د}$) محيطيتان تحصران القوس ب جـ

(٢) ق(أ $\hat{هـ}$ ب) = ق(د $\hat{هـ}$ جـ) بالتقابل بالرأس

من (١)، (٢) ينتج أن △ أ ب هـ ~ △ د جـ هـ أولاً

ثانياً: ∵ △ أ ب هـ ~ △ د جـ هـ

∴ $\frac{أب}{دجـ} = \frac{بهـ}{جـهـ} = \frac{أهـ}{دهـ}$ ∴ $\frac{أب}{دجـ} = \frac{بهـ}{١} = \frac{٤}{٢}$

∴ ب هـ = ٢ سم ∵ ب د = ب هـ + هـ د

∴ ب د = ٢ + ١ = ٣ سم

مثال: في الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{أب}$ مماساً للدائرة م عند ب أثبت أن

△أب جـ ~ △أ د ب

ثم أوجد محيط الدائرة

الحل

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماساً للدائرة م عند نقطة ب

∴ ق(∠أب جـ) المماسية = ق(∠ب د جـ) ← (١)

∵ △أب جـ ، △أ د ب فيهما

(١) ∠أ مشتركة

(٢) ق(∠أب جـ) = ق(∠أ د ب)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن △أب جـ ~ △أ د ب

ومن التشابه ينتج أن

$\frac{أب}{أد} = \frac{ب جـ}{د ب} = \frac{أجـ}{أب}$ ∴ $\frac{٦}{أد} = \frac{ب جـ}{د ب} = \frac{٤}{٦}$

∵ $\frac{٦}{أد} = \frac{٤}{٦}$ ∴ أد = $\frac{٦ \times ٦}{٤}$ ∴ أد = ٩سم

∵ أد = ٩سم ∴ جـ د = ٩ - ٤ = ٥سم

∵ جـ د = ٢نق ∴ نق = ٢,٥سم

∵ محيط الدائرة = ٢ π نق

= ٢ × π × ٢,٥ = ٥π سم

* تدريب:

هل يمكن إثبات أن $(أب)^٢$ = أجـ × أد

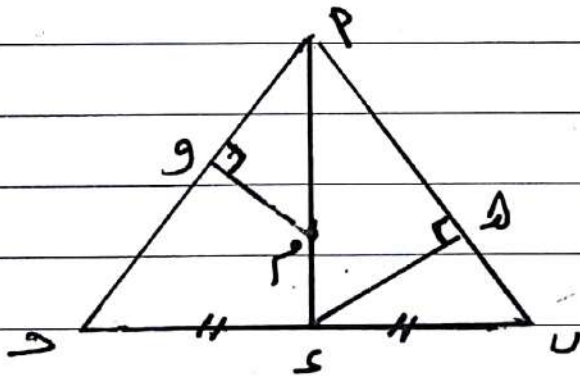
تمارين

(١) يتشابه المثلثان اذا طابقت ....

(٢) يتشابه المثلثان القائما الزاوية اذا ....

(٣) يتشابه المثلثان المتساويا الساقين اذا ....

(٤) اذا رسم مستقيم يوازي أحد اضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين فانه ....

(٥) في الشكل المقابل

* س° = ...

* واذا كان

△ أ ب جـ ~ △ د هـ و

فانه طول هـ و = ...

(٥) في الشكل المقابل

△ أ ب جـ متساوي الساقين

فيه أ ب = أ جـ

م نقطة تلاقي متوسطاته

فاذا كان د م = ٥ سم

فانه (أ) م أ = ... سم

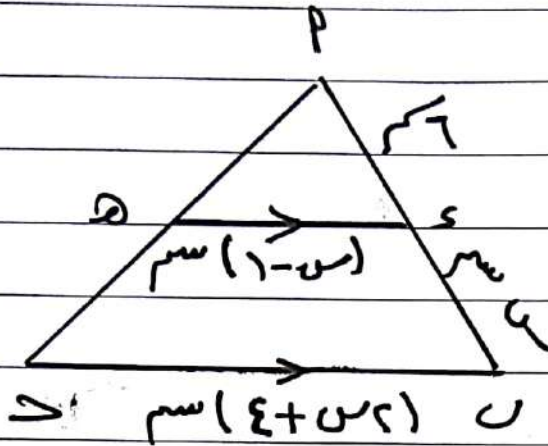
(ب) △ أ هـ د ~ △ ..... ~ △ ..... ~ △ .....

(هـ) اذا كان ب جـ = ٢٤ سم فانه أ و = ... سم

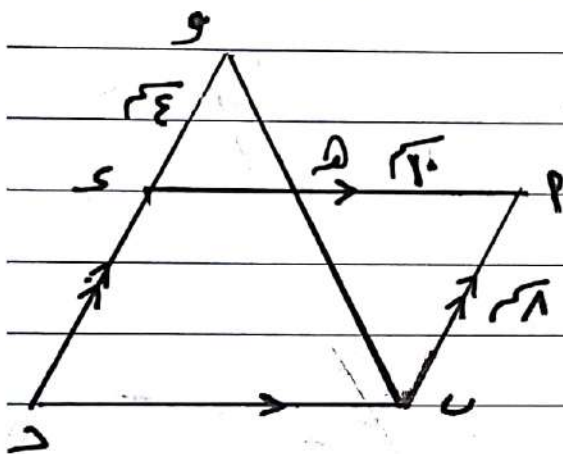
أ/ علي حمدون

(٦) في الشكل المقابل

إذا كان $\overline{د هـ} \parallel \overline{ب ح}$

فإن س = ... سم

(٧) في الشكل المقابل إذا كان

أ ب ح د متوازي أضلاع

فإن ب ح = ... سم

(٨) في الشكل المقابل

إذا كان ق(∠ب أ د) = ق(∠ح)

أ ب = ١٦سم ، ب د = ١٢سم

فإن د ح = ... سم

(٩) في الشكل المقابل

ب د = ...

تابع تشابه المثلثات

الحالة الثانية

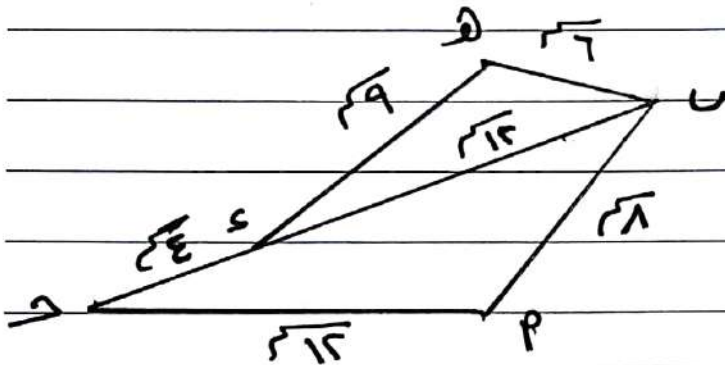
* نظرية (١)

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما يتشابهان

مثال

في الشكل المقابل أثبت أن

(١) المثلثين متشابهين

(٢) $\overrightarrow{بء}$ ينصف ∠ أ ب هـ

الحل

* ملحوظة هامة:

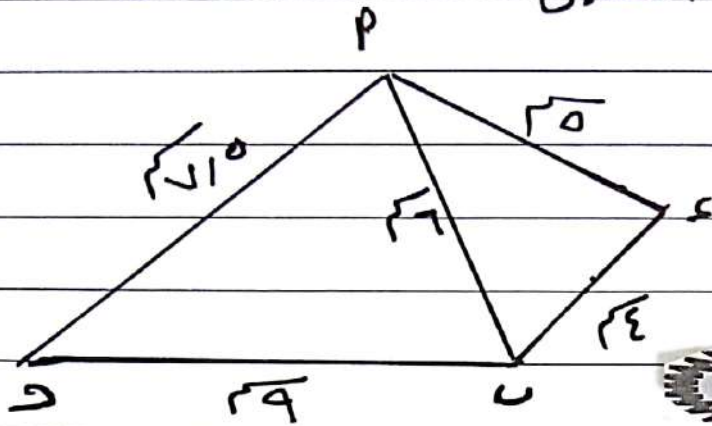
لابد من كتابة المثلثين المتشابهين بطريقة صحيحة

∵ △ ب أ جـ ، △ ب هـ ء فيهما

$\frac{ب أ}{ب هـ} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$ ، $\frac{أ جـ}{هـ ء} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$ ، $\frac{ب جـ}{ب ء} = \frac{١٦}{١٢} = \frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{ب أ}{ب هـ} = \frac{أ جـ}{هـ ء} = \frac{ب جـ}{ب ء}$ ← (الأضلاع المتناظرة متناسبة)

∴ △ ب أ جـ ~ △ ب هـ ء ← أولاً

ومن التشابه ينتج أن

ق (أ ب̂ جـ) = ق (هـ ب̂ ء)

∴ $\overrightarrow{بء}$ ينصف ∠ أ ب هـ

مثال: في الشكل المقابل

أثبت أن:
(١) المثلثين متشابهين
(٢) $\overleftarrow{ب أ}$ ينصف $\angle$ ء ب حـ

الحل

(١) ∵ △ ب أ حـ ، △ ب ء أ فيهما

$\frac{أب}{ب ء} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{أ حـ}{ء أ} = \frac{٧٫٥}{٥} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{ب حـ}{أ ب} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{أب}{ب ء} = \frac{أ حـ}{أ ء} = \frac{ب حـ}{أ ب}$ ⟵ ∴ △ ب أ حـ ~ △ ب ء أ

(٢) من التشابه ينتج أن ق($\angle$ حـ ب أ) = ق($\angle$ أ ب ء)

∴ $\overleftarrow{ب أ}$ ينصف $\angle$ ء ب حـ

---

* تدريب:

في الشكل المقابل
أثبت أن

(١) △ س ب ص ~ △ أ ب حـ

(٢) $\overleftarrow{ب حـ}$ ينصف $\angle$ أ ب س

الحالة الثالثة

* نظرية (٢)

اذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان كان المثلثان متشابهين.

فإذا كان

(١) ق(∠أ) = ق(∠د)

(٢) $\frac{أب}{ده} = \frac{أجـ}{دو}$

فإن Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و

مثال في الشكل المقابل

(١) أثبت أن Δ أ د هـ ~ Δ أ جـ ب

(٢) أوجد طول $\overline{د هـ}$

الحل

(١) ∵ Δ أ د هـ ، Δ أ جـ ب فيهما

١- ∠أ مشتركة

٢- ∵ $\frac{أد}{أجـ} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{أهـ}{أب} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{أد}{أجـ} = \frac{أهـ}{أب} = \frac{١}{٢}$

من (١)، (٢) ينتج أن Δ أ د هـ ~ Δ أ جـ ب (النظرية)

مثال في الشكل المقابل

أثبت أن

(1) Δ ء ب هـ ~ Δ جـ ب أ

(2) الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري

الحل

(1) ∵ Δ ء ب هـ ، Δ جـ ب أ فيهما

١- ∠ ب مشتركة

٢- $\frac{ءب}{جـب} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{بهـ}{بأ} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{ءب}{جـب} = \frac{بهـ}{بأ} = \frac{١}{٣}$ من (1) ، (2) ينتج أن Δ ء ب هـ ~ Δ جـ ب أ

(2) ∵ Δ ء ب هـ ~ Δ جـ ب أ (إثباتاً)

∴ ق(∠ ب ءَ هـ) = ق(∠ ب جـَ أ) وهي خارجة عن الشكل الرباعي أ ء هـ جـ

∴ الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري

مثال في الشكل المقابل

(1) أثبت أن Δ أ ب جـ ~ Δ ء ب أ

(2) أوجد طول $\overline{أء}$

(3) أثبت أن $\overline{أب}$ مماسة للدائرة المارة برؤوس Δ أ ء جـ

الحل

(1) ∵ Δ أ ب جـ ، Δ ء ب أ فيهما

١- ∠ ب مشتركة

٢- $\frac{أب}{بد} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{بحـ}{أب} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{أب}{دب} = \frac{بحـ}{أب} = \frac{٣}{٢}$ من ① ، ② ينتج أن Δ أبحـ ∼ Δ دبأ

(٢) ∵ Δ أبحـ ∼ Δ دبأ (إثباتاً ١)

∴ $\frac{أب}{بد} = \frac{بحـ}{أب} = \frac{أحـ}{دأ} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{أحـ}{أد} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{٨}{أد} = \frac{٣}{٢}$ منها د أ = $\frac{٨ \times ٢}{٣}$ = ٥ $\frac{١}{٣}$ سم

(٣) ∵ Δ أبحـ ∼ Δ دبأ

∴ ق(∠ب أ د) = ق(∠ب حـ أ)

∴ $\overline{أب}$ مماسة للدائرة المارة برؤوس Δ أ د حـ

مثال

في الشكل المقابل

أ ب حـ مثلث متساوي الساقين فيه أب = أحـ

أثبت أن Δ د ب هـ ∼ Δ و حـ هـ

الحل

∵ Δ د ب هـ ، Δ و حـ هـ فيهما

١- ق(∠ب) = ق(∠حـ) زاويتا القاعدة في Δ أ ب حـ

٢- $\frac{بد}{و حـ} = \frac{٤}{٢} = ٢$ ، $\frac{ب هـ}{حـ هـ} = \frac{٨}{٤} = ٢$

∴ $\frac{بد}{و حـ} = \frac{ب هـ}{حـ هـ} = ٢$ من ① ، ② ينتج أن

Δ د ب هـ ∼ Δ و حـ هـ

Scanned by CamScanner

النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين

* نظرية (٣) :-

النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما.

فإذا كان △ أ ب جـ ~ △ د هـ و فإن :-

$$\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{د هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}}\right)^2 = \left(\frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}}\right)^2$$

مثال

إذا كان △ أ ب جـ ~ △ د هـ و وكان أ ب = ٦ سم، د هـ = ٣ سم، مساحة △ أ ب جـ = ٦٤ سم² فإن مساحة △ د هـ و تساوي ......

الحل

∵ △ أ ب جـ ~ △ د هـ و ← ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}}$

∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{د هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}}\right)^2 = \left(\frac{٦}{٣}\right)^2$

∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{د هـ و})} = ٤$ ∴ $\frac{٦٤}{\text{م}(\triangle \text{د هـ و})} = ٤$ ومنها م(△ د هـ و) = ١٦ سم²

مثال أكمل ما يأتي

(١) النسبة بين محيطي مثلثين متشابهين تساوي ......

(٢) النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي ......

(٣) إذا كانت النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين $\frac{٤}{٩}$ فإن النسبة بين محيطيهما تساوي ......

(٤) إذا كانت النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين $\frac{٩}{١٦}$ ومحيط المثلث الأصغر ٦٠ سم فإن محيط المثلث الأكبر يساوي ......

الحل

(١) تساوي النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما

(٢) تساوي مربع النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما تساوي مربع النسبة بين محيطيهما

(٣) ∵ $\frac{م_1}{م_2} = \frac{4}{9}$ ∴ $\frac{4}{9} = \left(\frac{\text{محيط الأول}}{\text{محيط الثاني}}\right)^2$

∴ $\frac{\text{محيط الأول}}{\text{محيط الثاني}} = \frac{2}{3}$ ∴ النسبة بين محيطيهما تساوي $\frac{2}{3}$

(٤) ∵ $\frac{م_1}{م_2} = \frac{9}{16}$ ∴ $\frac{9}{16} = \left(\frac{\text{محيط الأصغر}}{\text{محيط الأكبر}}\right)^2$

∴ $\frac{3}{4} = \frac{60}{\text{محيط الأكبر}}$ ∴ محيط الأكبر $= \frac{60 \times 4}{3} = 80$ سم

مثال

في الشكل المقابل

$\overline{دهـ} \parallel \overline{ب جـ}$ ، $أب = 2 أد$

(١) أوجد $\frac{م(\triangle أدهـ)}{م(\triangle أب جـ)}$

(٢) أوجد $\frac{م(\triangle أدهـ)}{م(\square د ب جـ هـ)}$

الحل

(١) ∵ $\triangle$ أب جـ فيه $\overline{دهـ} \parallel \overline{ب جـ}$

∵ Δ أدهـ ~ Δ أب جـ (نتيجة)

∴ $\frac{أد}{أب} = \frac{دهـ}{ب جـ} = \frac{أجـ}{أهـ}$

∵ أب = ٢ أد مثلاً ∴ $\frac{أد}{أب} = \frac{١}{٢}$

أو Δ أدهـ ~ Δ أب جـ وفيها $\frac{أد}{أب} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{م(Δ أدهـ)}{م(Δ أب جـ)} = \left(\frac{أد}{أب}\right)^{٢} = \frac{١}{٤}$ ← I أولاً

(٢) $\frac{م(Δ أدهـ)}{م(Δ أب جـ)} = \frac{١}{٤}$

∴ $\frac{مقدم}{تالي - مقدم} = \frac{مقدم}{تالي - مقدم}$

∴ $\frac{م(Δ أدهـ)}{م(Δ أب جـ) - م(Δ أدهـ)} = \frac{١}{٤ - ١}$

∴ $\frac{م(Δ أدهـ)}{م(▭ د ب جـ هـ)} = \frac{١}{٣}$ ← ثانياً

مثال

اذا كان Δ أب جـ ~ Δ د هـ و وكان م(Δ أب جـ) = ٩ م(Δ د هـ و) وكان د هـ = ٥ سم فإن طول $\overline{أب}$ يساوي -----

الحل

∵ Δ أب جـ ~ Δ د هـ و ∴ $\frac{م(Δ أب جـ)}{م(Δ د هـ و)} = \left(\frac{أب}{د هـ}\right)^{٢}$

$\because \frac{9\ م(\triangle ء هـ و)}{م(\triangle ء هـ و)} = \left(\frac{أ ب}{٥}\right)^2 \Leftarrow \therefore 9 = \left(\frac{أ ب}{٥}\right)^2$

$\therefore ٣ = \frac{أ ب}{٥}$ فمنها أ ب = ١٥ سم

مثال في الشكل المقابل

أ ب حـ ء متوازي أضلاع

$\frac{أ هـ}{هـ ب} = \frac{٣}{٢}$

(١) أثبت أن

$\triangle$ ء حـ و ~ $\triangle$ هـ أ ء

(٢) أوجد $\frac{م(\triangle ء حـ و)}{م(\triangle هـ أ ء)}$

الحل

$\because$ أ ب حـ ء متوازي أضلاع

$\therefore$ ق(حـ) = ق(أ) ← ①

$\because$ أ ء // و حـ $\therefore$ ق(ء و حـ) = ق(هـ ء أ) (بالتبادل) ← ②

من ① ، ② ينتج أن

$\triangle$ ء حـ و ، $\triangle$ هـ أ ء فيهما

(١) ق(حـ) = ق(أ)

(٢) ق(ء و حـ) = ق(هـ ء أ)

$\therefore \triangle$ ء حـ و ~ $\triangle$ هـ أ ء ← أولاً

ثانياً $\because \triangle$ ء حـ و ~ $\triangle$ هـ أ ء

$\therefore \frac{م(\triangle ء حـ و)}{م(\triangle هـ أ ء)} = \left(\frac{ء حـ}{هـ أ}\right)^2 = \left(\frac{أ ب}{هـ أ}\right)^2$ حيث ء حـ = أ ب

$\therefore \frac{م(\triangle ء حـ و)}{م(\triangle هـ أ ء)} = \left(\frac{٥}{٣}\right)^2 = \frac{٢٥}{٩}$

مثال

أ ب جـ مثلث فيه $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤}{٣}$ رسمت الدائرة المارة برؤوسه

ومن نقطة ب رسم مماس لهذه الدائرة فقطع $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$

في هـ أثبت أن $\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب جـ})}{\text{م}(\Delta \text{ أ ب هـ})} = \frac{٧}{١٦}$

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ مماسة للدائرة عند نقطة ب

∴ ق(∠ هـ ب جـ) المماسية = ق(∠ هـ أ ب)

∴ Δ أ ب هـ ، Δ ب جـ هـ فيهما

(١) ق(∠ هـ أ ب) = ق(∠ هـ ب جـ)

(٢) ∠ هـ مشتركة

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن Δ أ ب هـ ~ Δ ب جـ هـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب هـ})}{\text{م}(\Delta \text{ ب جـ هـ})} = \left(\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}\right)^{٢} = \frac{١٦}{٩}$ ومن الرسم نجد أن

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب هـ})}{\text{م}(\Delta \text{ أ ب هـ}) - \text{م}(\Delta \text{ أ ب جـ})} = \frac{١٦}{٩}$

وباستخدام خواص التناسب $\frac{\text{مقدم} - \text{تالي}}{\text{مقدم}} = \frac{\text{مقدم} - \text{تالي}}{\text{مقدم}}$ ينتج

$\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب جـ})}{\text{م}(\Delta \text{ أ ب هـ})} = \frac{١٦ - ٩}{١٦} = \frac{٧}{١٦}$

ملاحظات هامة

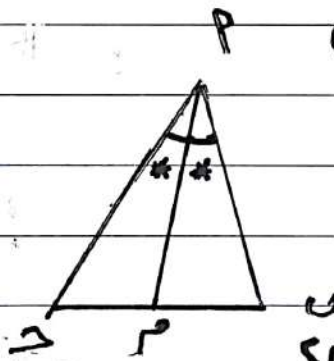
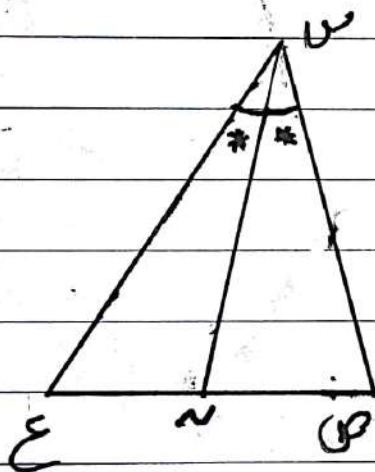
(١) النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي متوسطين متناظرين فيهما

أي أنه إذا كان Δ أ ب جـ $\sim$ Δ س ص ع فإن:

$$\frac{م(\Delta \text{ أ ب جـ})}{م(\Delta \text{ س ص ع})} = \left(\frac{\text{أ ء}}{\text{س ل}}\right)^2$$

(٢) إذا كان Δ أ ب جـ $\sim$ Δ س ص ع

وكان $\overleftarrow{\text{أ م}}$ ينصف $\angle$ أ

، $\overleftarrow{\text{س ن}}$ ينصف $\angle$ س

فإن $$\frac{م(\Delta \text{ أ ب جـ})}{م(\Delta \text{ س ص ع})} = \left(\frac{\text{أ م}}{\text{س ن}}\right)^2$$

(٣) النسبة بين مساحتي مثلثين مشتركين في القاعدة تساوي النسبة بين ارتفاعيهما

(٤) النسبة بين مساحتي مثلثين مشتركين في الارتفاع تساوي النسبة بين طولي قاعدتيهما

نظرية (٤)

النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما

مثال

(١) إذا كان طولا ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين ٣ سم ، ٤ سم فإن النسبة بين مساحتيهما تساوي ....

(٢) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٥ فإن النسبة بين مساحتيهما ....

(٣) مربعان النسبة بين طولي قطريهما ٢ : ٥ فإذا كانت مساحة أصغرهما ٤ سم² فإن مساحة أكبرهما .....

الحل

(١) ∵ طول الضلعين المتناظرين ٣ سم ، ٤ سم

∴ $\frac{م_١}{م_٢} = \left(\frac{٣}{٤}\right)^٢ = \frac{٩}{١٦}$

(٢) ∵ المضلعان متشابهان

∴ النسبة بين مساحتيهما = مربع النسبة بين محيطيهما

$= \left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ = \frac{٩}{٢٥}$

(٣) ∵ $\frac{\text{مساحة المربع الأكبر}}{\text{مساحة المربع الأصغر}} = \left(\frac{٥}{٢}\right)^٢$

∴ مساحة المربع الأكبر $= \frac{٢٥}{٤} \times ٤ = ٢٥$ سم²

أ/ علي حمدون

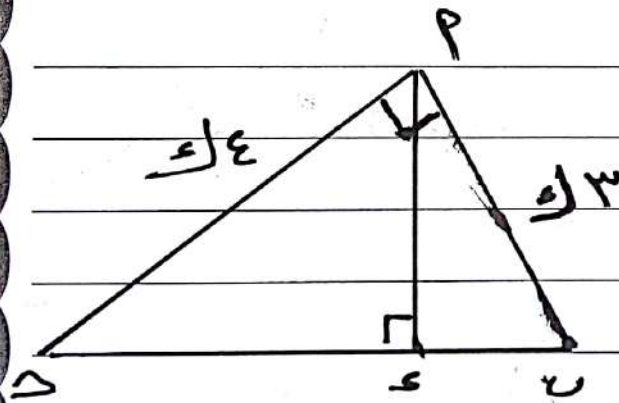
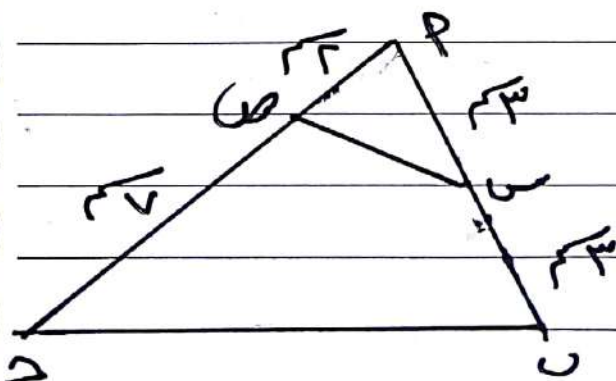
تمارين

(١) اذا كانت النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين ٣٦ : ٢٥ فإن النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما تساوي ......

(٢) اذا كانت النسبة بين محيطي مثلثين متشابهين ١ : ٥ فإن النسبة بين مساحتيهما تساوي ......

(٣) اذا كان Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع وكان ٣ أ ب = ٢ س ص فإن م(Δ أ ب جـ) : م(Δ س ص ع) = ...

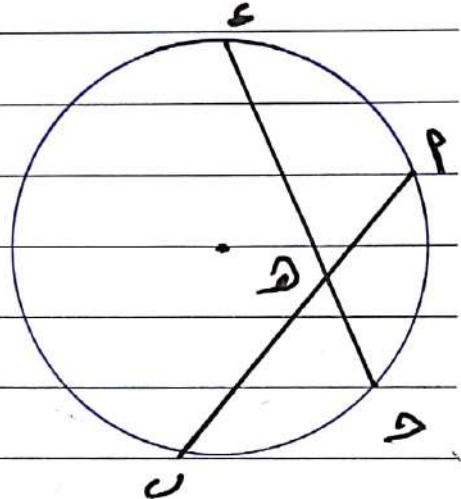
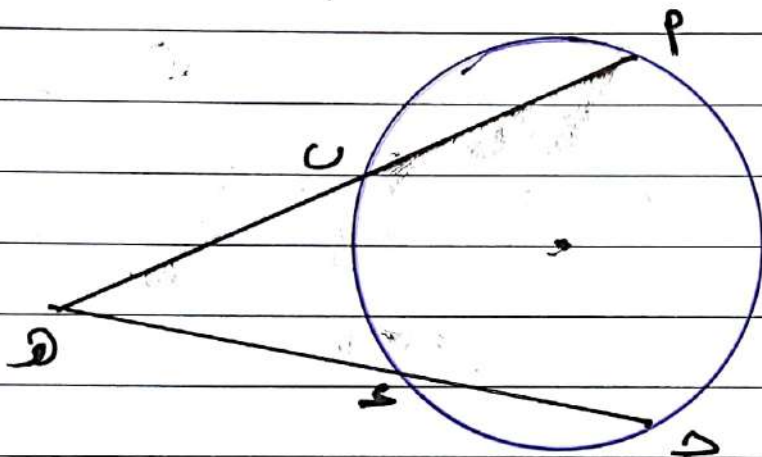
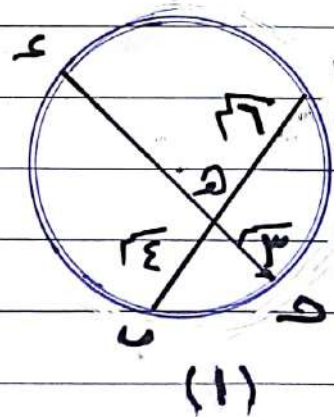
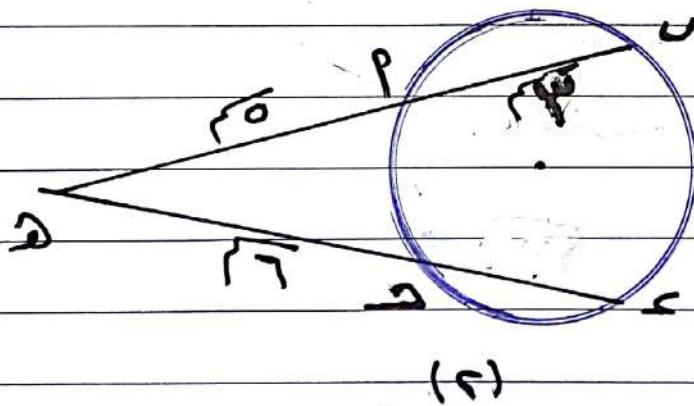
(٤) مربعان النسبة بين طولي قطريهما ٥ : ٣ ومساحة أصغرهما ٣٦ سم² فإن مساحة الأكبر = ...

(٥) في الشكل المقابل اذا كان م(Δ أ ء جـ) = ١٦٠ سم² فإن م(Δ أ ب ء) = ...

(٦) في الشكل المقابل اذا كان مساحة Δ أ ب جـ = ٤٥ سم² فإن مساحة Δ أ س ص = ...

تطبيقات التشابه في الدائرة

* تمرين مشهور :-

اذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ د}$ في نقطة هـ فان :-

هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د

مثال في كل مما يأتي اوجد طول $\overline{هـ د}$

الحل

(١) ∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ د}$ وتران في دائرة ، $\overline{أب} \cap \overline{جـ د}$ = {هـ}

∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د ∴ ٦ × ٤ = ٣ × هـ د

∴ هـ د = ٨ سم

(٢) ∵ $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـ د} = \{هـ\}$ ∴ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د

∴ ٥ × ٨ = ٦ × هـ د منها هـ د = $٦\frac{٢}{٣}$ سم

عكس التمرين المشهور

اذا تقاطع المستقيمان الحاويان للقطعتين $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ د}$ في نقطة هـ وكان هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ د فإن النقط أ ، ب ، جـ ، د تقع على دائرة واحدة.

ويكون الشكل الرباعي أ ب جـ د رباعيا دائري

مثال

اذا كان $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـ د} = \{م\}$ حيث

أم = ٢ سم ، م ب = ١٠ سم ، م جـ = ٤ سم ، م د = ٥ سم

أثبت أن $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ د}$ وتران في دائرة

الحل

∵ $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـ د} = \{م\}$

∵ م أ × م ب = ٢ × ١٠ = ٢٠ ← (١)

∵ م جـ × م د = ٤ × ٥ = ٢٠ ← (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن م أ × م ب = م جـ × م د

∴ أ ، ب ، جـ ، د تقع على دائرة واحدة

∴ $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ د}$ وتران في الدائرة

مثال

في الشكل المقابل

أثبت أن

(١) الشكل ب جـ هـ د رباعي دائري

(٢) △ أ ب جـ ∼ △ أ هـ د

الحل

∵ $\overleftrightarrow{ب ء} \cap \overleftrightarrow{جـ هـ} = \{م\}$

م ء × م ب = ٤ × ١٢ = ٤٨ ← (١)

م هـ × م جـ = ٦ × ٨ = ٤٨ ← (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن النقط ب ، جـ ، هـ ، ء تقع على دائرة

∴ الشكل ب جـ هـ ء رباعي دائري ← اولاً

ثانياً : ∵ △ م ب جـ ، △ م هـ ء فيهما

١- ∠ م مشتركة

٢- ق (∠ م ء هـ) = ق (∠ م ب جـ) لانها خارجة عن الشكل الرباعي الدائري

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن △ م ب جـ ∼ △ م هـ ء

نتيجة (١)

اذا كانت $\overline{م جـ}$ مماسة للدائرة عند نقطة جـ

فإن

$(م جـ)^2 = م أ × م ب$

مثال

في الشكل المقابل

$\overline{م جـ}$ مماسة للدائرة

اوجد طول $\overline{م جـ}$

الحل

∵ $\overline{م جـ}$ مماسة للدائرة

∴ $(م جـ)^2 = م أ × م ب$

= ٦ × ٨ = ٤٨

∴ م جـ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

مثال

إذا كان $\overleftrightarrow{جـء}$ مماساً مشتركاً أثبت أن هـ منتصف $\overline{جـء}$

الحل

في الدائرة م ∵ $\overline{هـجـ}$ مماسة للدائرة م

∴ (هـجـ)^2 = هـأ × هـب ← (١)

في الدائرة ن ∵ $\overline{هـء}$ مماسة للدائرة ن

∴ (هـء)^2 = هـأ × هـب ← (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن (هـجـ)^2 = (هـء)^2

∴ هـجـ = هـء ∴ هـ منتصف $\overline{جـء}$

مثال

في الشكل المقابل

محيط الدائرة = ...

الحل

∵ (أب)^2 = أجـ × أء

∴ (٤√٣)^2 = نق × ٣ نق

∴ ١٦ × ٣ = ٣ نق^2

∴ نق = ٤ سم ومنها محيط الدائرة = ٢ π نق = ٨ π سم

عكس نتيجة (1)

إذا كان

(م جـ)^2 = م أ × م ب

فإن $\overline{\text{م جـ}}$ تكون مماسة

للدائرة المارة بالنقط

أ ، ب ، جـ

أي أن :

$\overline{\text{م جـ}}$ تكون مماسة للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ

مثال

في الشكل المقابل

Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

أثبت أن

$\overline{\text{ب جـ}}$ مماسة للدائرة

المارة برؤوس Δ أ ب ء

الحل

∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

فيه أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٣ سم ∴ أ جـ = ٥ سم

∴ (جـ ب)^2 = (٣)^2 = ٩ ← ①

جـ ء × جـ أ = ١,٨ × ٥ = ٩ ← ②

∴ من ① ، ② ينتج أن

(جـ ب)^2 = جـ ء × جـ أ

∴ $\overline{\text{جـ ب}}$ مماسة للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب ء

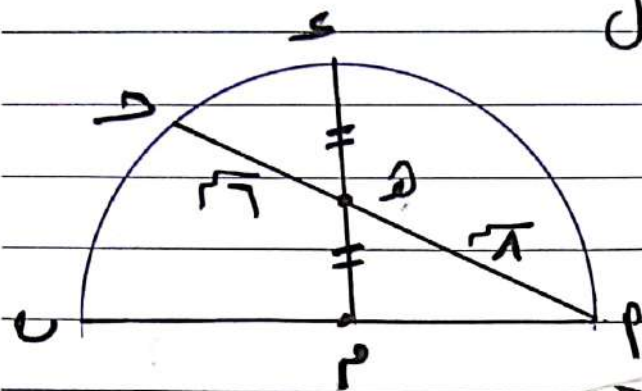
* تدريب :

في المثال السابق أثبت أن Δ أ ب جـ ~ Δ ب ء جـ

مثال في الشكل المقابل

اذا كان $\overline{اب}$ قطراً في نصف الدائرة فإن

م هـ = ...

اب = ...

الحل

نفرض أن $\overline{اجـ}$ ، $\overline{ءو}$ وتران في الدائرة م

حيث ءو = ٤ م هـ = ٤ ءهـ

∵ $\overline{اجـ} \cap \overline{ءو} = \{هـ\}$ ∴ هـ ا × هـ جـ = هـ ء × هـ و

∴ ٨ × ٦ = م هـ × ٣ م هـ ∴ (م هـ)^2 = ١٦

∴ م هـ = ٤ سم ، اب = ءو = ٤ م هـ = ١٦ سم

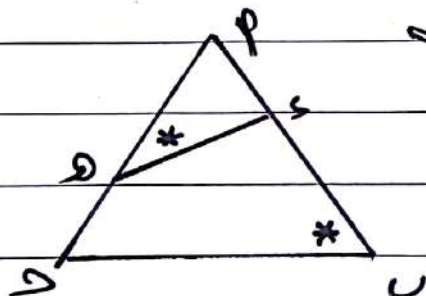
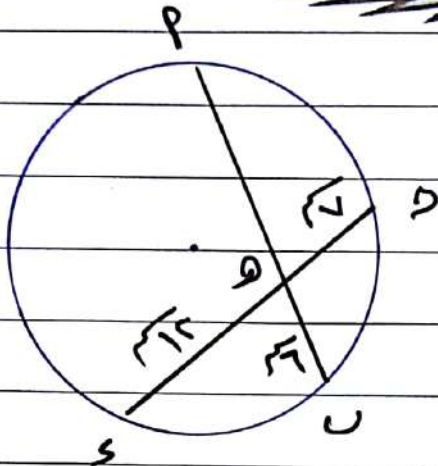
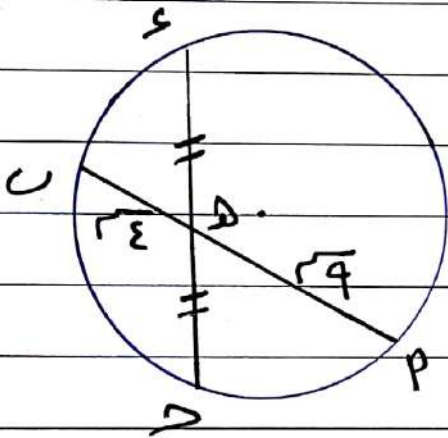
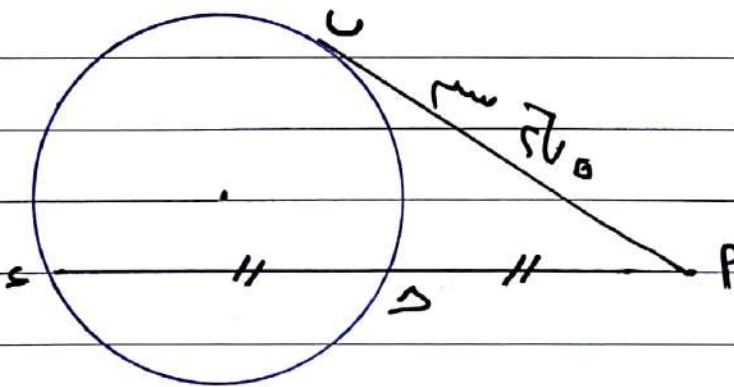
مثال في الشكل المقابل اذا كان م مركز نصف الدائرة فإن س = ... سم

الحل

∵ ٦ × ٤ = ٢ × (س + س + ٢)

∴ ٢٤ = ٢ (٢س + ٢)

∴ ١٢ = ٢س + ٢

∴ ٢س = ١٠ منها س = ٥

تدريب: في الشكل المقابل يكون

اء × .... = ... × اجـ

أ/ علي حمدون
تمارين
(١) في الشكل المقابل
أ هـ = ------ سم
٧سم
١٢سم
٦سم
(٢) في الشكل المقابل
هـ ء = ------ سم
٤سم
٩سم
(٣) في الشكل المقابل
أ ء = ------ سم
٥√٢ سم
(٤) △ أ ب جـ فيه ء ∈ ب جـ بحيث ء ب = ٥ سم ، ء جـ = ٤ سم وكان
أ جـ = ٦ سم أثبت أن (١) أ جـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء
(٢) △ أ جـ ء ~ △ ب جـ أ
(٣) م (△ أ ب ء) : م (△ أ ب جـ) = ٥ : ٩

نظريات التناسب في المثلث

* نظرية (1)

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.

فإذا كان $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$ فإن

$$\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}}$$

$$\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أحـ}}$$

مثال في الشكل المقابل

$\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

أء = 2 سم ، ء ب = 3 سم

أهـ = 4 سم

أوجد طول $\overline{\text{أحـ}}$

الحل

∵ Δ أ ب حـ فيه $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أحـ}}$ ∴ $\frac{2}{5} = \frac{4}{\text{أحـ}}$

∴ أجـ = $\frac{5 \times 4}{2}$ ∴ أحـ = 10 سم

نتيجة

إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب جـ يوازي ضلعاً من أضلاعه وليكن $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ في د ، هـ على الترتيب

فإن $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب د}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ هـ}}$

فإذا كان $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{هـ د}}$ فإن

$\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}}$

$\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{د ب}}$

مثال

في الشكل المقابل :-

$\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{د هـ}}$

أ جـ = ٦ سم ، ب جـ = ٤ سم

جـ د = ٣ سم أوجد طول $\overline{\text{جـ هـ}}$

الحل

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{د هـ}}$

∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جـ د}}$ ∴ $\frac{٦}{\text{جـ هـ}} = \frac{٤}{٣}$

∴ جـ هـ = $\frac{٦ \times ٣}{٤}$ ∴ جـ هـ = ٤٫٥ سم

مثال

أ ب جـ مثلث فيه د ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث

أ د = $\frac{٥}{٨}$ أ ب رسم $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ فقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ في هـ

ثانياً إذا كان أجـ = ٢٤ سم أوجد طول أهـ

وإذا كان طول د هـ = ١٢ سم أوجد طول ب جـ

الحل

∵ أد = $\frac{٥}{٨}$ أب معطى

∴ $\frac{أد}{أب} = \frac{٥}{٨}$

∵ Δ أ ب جـ فيه

د هـ // ب جـ

∴ $\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ}$

∴ $\frac{٥}{٨} = \frac{أهـ}{٢٤}$ ∴ أهـ = $\frac{٢٤ \times ٥}{٨}$ ∴ أهـ = ١٥ سم

ثانياً: ∵ Δ أ ب جـ فيه د هـ // ب جـ

∴ Δ أ د هـ ~ Δ أ ب جـ (نتيجة)

∴ $\frac{أد}{أب} = \frac{د هـ}{ب جـ} = \frac{أهـ}{أجـ}$ ∴ $\frac{٥}{٨} = \frac{١٢}{ب جـ}$ منها ب جـ = ١٩٫٢ سم

مثال

في الشكل المقابل

إذا كان د هـ // ب جـ أوجد طول

أ هـ ، طول ب جـ

الحل

∵ د هـ // ب جـ ∴ $\frac{هـ أ}{ب أ} = \frac{د أ}{جـ أ}$

∴ $\frac{هـ أ}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ منها أ هـ = ٨ سم

* ثانياً : ∵ $\overline{دهـ} \parallel \overline{بجـ}$ ∴ Δ أدهـ ~ Δ أجب (نتيجة)

∴ $\frac{أد}{أجـ} = \frac{دهـ}{جـب} = \frac{أهـ}{أب}$ ∴ $\frac{4}{5} = \frac{12}{بجـ}$ منها بجـ = 15 سم

مثال

في الشكل المقابل

$\overline{دو} \parallel \overline{بهـ}$

$\overline{دهـ} \parallel \overline{بجـ}$

أوجد طول كلاً من

$\overline{وهـ}$ ، $\overline{هـجـ}$

الحل

∵ Δ أبهـ فيه $\overline{دو} \parallel \overline{بهـ}$ معطى

∴ $\frac{أد}{دب} = \frac{أو}{وهـ}$ ∴ $\frac{6}{8} = \frac{1,5}{وهـ}$ منها وهـ = 2 سم أولاً

∵ Δ أبجـ فيه $\overline{دهـ} \parallel \overline{بجـ}$ معطى

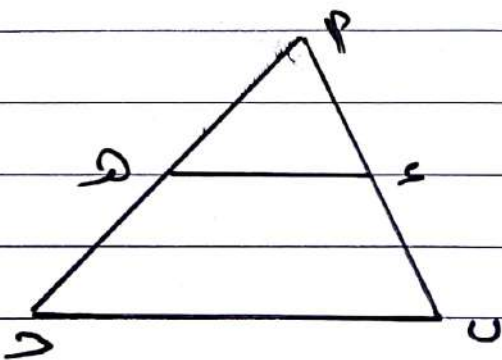
∴ $\frac{أد}{دب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$ ∴ $\frac{6}{8} = \frac{3,5}{هـجـ}$ منها هـجـ = 4,66 سم

عكس نظرية (1)

إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازي الضلع الثالث

فإذا كان $\frac{أد}{دب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$

أو كان $\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ}$ فإن :

$\overline{دهـ} \parallel \overline{بجـ}$

* عكس النتيجة :

إذا كان $\frac{أء}{أجـ} = \frac{أهـ}{أب}$

أو كان $\frac{ءأ}{ءجـ} = \frac{هـأ}{هـب}$ فإن

$\overline{ءهـ} \parallel \overline{بجـ}$

مثال

في الأشكال الآتية أثبت أن $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بجـ}$

الحل

(١) في شكل (١) ∵ $\frac{أء}{ءب} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{أهـ}{هـجـ} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{أء}{ءب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$ ∴ $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بجـ}$

(٢) في شكل (٢) ∵ $\frac{ءأ}{أجـ} = \frac{٥}{١٥} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{هـأ}{أب} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{هـأ}{أب} = \frac{ءأ}{أجـ}$ ∴ $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بجـ}$

مثال في الشكل المقابل

إذا كان ٣ أ د = ٤ د ب

أ هـ = ٤/٧ أ جـ

(١) أثبت أن $\overline{د هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

(٢) أوجد طول $\overline{ب جـ}$

الحل

∵ أ هـ = ٤/٧ أ جـ معطى

∴ أ هـ / أ جـ = ٤/٧ ← (١)

∵ ٣ أ د = ٤ د ب معطى

∴ أ د / د ب = ٤/٣ ومنها

أ د / أ ب = ٤/٧ ← (٢)

من (١) و (٢) ينتج أن

أ د / أ ب = أ هـ / أ جـ في Δ أ ب جـ ∴ $\overline{د هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ أولاً

(٢) ∵ Δ أ ب جـ فيه $\overline{د هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ثانياً

∴ Δ أ د هـ ~ Δ أ ب جـ (نتيجة)

∴ أ د / أ ب = د هـ / ب جـ = أ هـ / أ جـ ∴ ٤/٧ = ١٠ / ب جـ

∴ ب جـ = (١٠ × ٧) / ٤ ∴ ب جـ = ١٧,٥ سم ثانياً

مثال في الشكل المقابل

إذا كان ءهـ // ب حـ

أثبت أن

وهـ // أ ب

الحل

∵ △ أ ب حـ فيه

ءهـ // ب حـ معطى

∵ أء / ءب = أهـ / هـحـ ∴ ٢ / ٣ = ٤ / هـحـ ∴ هـحـ = ٦سم

∵ △ أ ب حـ فيه حـهـ / هـأ = ٦ / ٤ = ٣ / ٢ ①

حـو / وب = ٩ / ٦ = ٣ / ٢ ②

من ①، ② ينتج أن حـهـ / هـأ = حـو / وب ∴ وهـ // أ ب

مثال في الشكل المقابل

إذا كان ءو // ب هـ

ءهـ // ب حـ

فإن أو × أحـ = ... (اختار)

(أ) أهـ (ب) (أهـ)٢ (حـ) (ءهـ)٢ (ء) وهـ × هـحـ

الحل

∵ ءو // ب هـ ، ءهـ // ب حـ ∴ أء / أب = أو / أهـ = أهـ / أحـ

∴ أو × أحـ = (أهـ)٢

مثال

في الشكل المقابل

إذا كان

$\overline{هـ جـ} // \overline{ب و}$ ، $\overline{ب جـ} // \overline{أ و}$

أثبت أن

$(د ب)^2 = د هـ \times د أ$

الحل

∵ △ د ب و وفيه $\overline{هـ جـ} // \overline{ب و}$ معطى

∴ $\frac{د هـ}{د ب} = \frac{د جـ}{د و}$ ← ① ومنها $د ب = \frac{د و \times د هـ}{د جـ}$

∵ △ د أ و وفيه $\overline{ب جـ} // \overline{أ و}$ معطى

∴ $\frac{د ب}{د أ} = \frac{د جـ}{د و}$ ← ② ومنها $د ب = \frac{د جـ \times د أ}{د و}$

بضرب ① × ② ينتج $(د ب)^2 = د هـ \times د أ$

مثال

في الشكل المقابل

$\overline{د س} // \overline{أ جـ}$ ، $\overline{هـ ص} // \overline{أ ب}$ ، ب جـ = ١٣٫٥ سم

أوجد طول $\overline{س ص}$

الحل

∵ $\overline{د س} // \overline{أ جـ}$

∴ $\frac{ب س}{ب جـ} = \frac{٢}{٥}$ ∴ $\frac{ب س}{١٣٫٥} = \frac{٢}{٥}$

∴ $ب س = \frac{٢٧}{٥} = ٥٫٤$ سم ← ①

∵ $\overline{هـ ص} // \overline{أ ب}$ ∴ $\frac{جـ ص}{جـ ب} = \frac{جـ هـ}{جـ أ}$ ∴ $\frac{جـ ص}{١٣٫٥} = \frac{٤}{٩}$ ومنها جـ ص = ٦ سم ②

∴ س ص = ١٣٫٥ − (ب س + جـ ص) ∴ س ص = ٢٫١ سم

نظرية تاليس

* نظرية (٢) (نظرية تاليس العامة)

اذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر

فاذا كان

$\overleftrightarrow{أ ء} \parallel \overleftrightarrow{ب هـ} \parallel \overleftrightarrow{حـ و}$ فإن

$\frac{أ ب}{ب حـ} = \frac{ء هـ}{هـ و}$

$\frac{أ ب}{أ حـ} = \frac{ء هـ}{ء و}$

مثال

في الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{أ ء} \parallel \overleftrightarrow{س ص} \parallel \overleftrightarrow{ب حـ}$

أ س = ٢ سم ، س ب = ٥ سم

ء حـ = ٢١ سم أوجد طول $\overline{ء ص}$

الحل

∵ $\overleftrightarrow{أ ء} \parallel \overleftrightarrow{س ص} \parallel \overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ء حـ}$ قاطعان لهما

∴ $\frac{أ س}{أ ب} = \frac{ء ص}{ء حـ}$ ∴ $\frac{٢}{٧} = \frac{ء ص}{٢١}$ ∴ ء ص = ٦ سم

أ/ علي حمدون

تمارين

(١) في كل من الأشكال الآتية $\overline{\text{ده}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

أوجد قيمة س العددية

(٢) أ ب جـ مثلث، د ∈ $\overline{\text{بجـ}}$ بحيث $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{٣}{٤}$ ، هـ ∈ $\overline{\text{أد}}$

بحيث $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ د}} = \frac{٣}{٧}$ رسم $\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$ فقطع $\overline{\text{أب}}$ في س

رسم $\overline{\text{د ص}} \parallel \overline{\text{جـ س}}$ فقطع $\overline{\text{أب}}$ في ص أثبت أن أ س = ب ص

(٣) في الشكل المقابل

جـ هـ = ...

(٤) في الشكل المقابل

م نقطة تلاقي متوسطات

المثلث

$\frac{\text{د م}}{\text{د جـ}} = $ ....

Scanned by CamScanner

منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

* نظرية (٣) :-

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين .

∵ $\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠ ب أ جـ

∴ $\frac{ب د}{د جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$

∵ $\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠ ب أ جـ من الخارج

∴ $\frac{ب د}{د جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$

مثال

في الشكل المقابل

$\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠ ب أ جـ

أوجد طول $\overline{أب}$

الحل

∵ $\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠ ب أ جـ في Δ أ ب جـ

∴ $\frac{ب د}{د جـ} = \frac{أ ب}{أ جـ}$ ∴ $\frac{٣}{٢} = \frac{أ ب}{٤}$ ∴ أ ب = ٦سم

مثال

في الشكل المقابل

اهـ ينصف ∠ ب ا حـ من الخارج

أوجد طول حـ هـ

الحل

∵ △ ا ب حـ فيه اهـ ينصف ∠ ب ا حـ من الخارج

∴ (ب هـ) / (هـ حـ) = (ب ا) / (ا حـ) ∴ (ب هـ) / (هـ حـ) = ٨ / ٦

∴ (حـ هـ + ٥) / (هـ حـ) = ٨ / ٦ ∴ ٦ حـ هـ + ٣٠ = ٨ حـ هـ

∴ ٢ حـ هـ = ٣٠ ومنها حـ هـ = ١٥ سم

مثال

ا ب حـ مثلث محيطه ٢٧ سم. رسم ب ء ينصف ∠ ب ويقطع ا حـ في ء فإذا كان اء = ٤ سم

حـ ء = ٥ سم أوجد طول ا ب ، ب حـ

الحل

∵ محيط △ ا ب حـ = ٢٧ سم

∴ ا ب + ب حـ + ٩ = ٢٧

∴ ا ب + ب حـ = ١٨ ← (١)

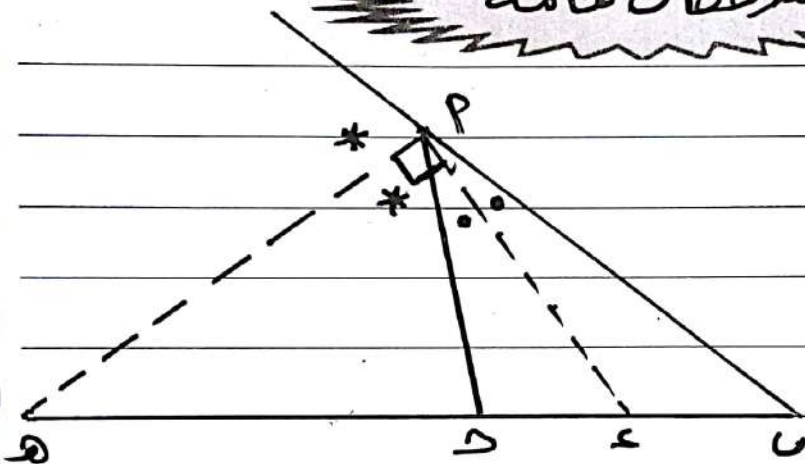
∵ ب ء ينصف ∠ ب في △ ا ب حـ

∴ (اء) / (ء حـ) = (ا ب) / (ب حـ) ∴ ٤ / ٥ = (ا ب) / (ب حـ) ← (٢)

باستخدام خواص التناسب $\frac{\text{مقدم}+\text{تالي}}{\text{تالي}} = \frac{\text{مقدم}+\text{تالي}}{\text{تالي}}$

$\therefore \frac{٤+٥}{٥} = \frac{\text{أب}+\text{بجـ}}{\text{بجـ}} \quad \therefore \frac{٩}{٥} = \frac{١٨}{\text{بجـ}}$

$\therefore \text{بجـ} = \frac{١٨\times٥}{٩} \quad \therefore \text{بجـ} = ١٠$ سم بالتعويض في (١) ينتج أب = ٨ سم

ملاحظات هامة

(١) المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية رأس مثلث يكونان متعامدين

(٢) المنصفان الداخلي والخارجي لزاوية رأس مثلث يقسمان كل منهم قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج على الترتيب بنفس النسبة أي أن $\frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{هـجـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

(٣) منصف زاوية رأس المثلث المتساوي الساقين يوازي القاعدة

(٤) طول المنصف الداخلي $\overline{\text{أء}} = \sqrt{\text{أب}\times\text{أجـ} - \text{بء}\times\text{ءجـ}}$

(٥) طول المنصف الخارجي $\overline{\text{أهـ}} = \sqrt{\text{بهـ}\times\text{هـجـ} - \text{أب}\times\text{أجـ}}$

(٦) تتقاطع منصفات زوايا المثلث الداخلة في نقطة واحدة

أ/ علي حمدون

مثال في الشكل المقابل أوجد طول $\overline{أد}$

(١) في شكل (١) ∵ $\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠ب أ هـ من الداخل

∴ $\frac{ب د}{د هـ} = \frac{أ ب}{أ هـ}$ ∴ $\frac{ب د}{٦} = \frac{١٥}{٩}$ ∴ ب د = ١٠ سم

∴ أد = $\pm\sqrt{أب \times أهـ - ب د \times د هـ}$ ∴ أد = $\sqrt{١٥ \times ٩ - ١٠ \times ٦}$

∴ أد = $\sqrt{٧٥}$ ∴ أد = $٥\sqrt{٣}$ سم

(٢) في شكل (٢) ∵ $\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠أ من الخارج

∴ $\frac{جـ د}{د ب} = \frac{جـ أ}{أ ب}$ ∴ $\frac{جـ د}{د ب} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{ب د + ٥}{ب د} = \frac{٤}{٣}$ ∴ ٣ ب د + ١٥ = ٤ ب د ∴ ب د = ١٥ سم

∴ أد = $\sqrt{جـ د \times د ب - جـ أ \times أ ب}$

∴ أد = $\sqrt{٢٠ \times ١٥ - ٨ \times ٦}$ ∴ أد = $٦\sqrt{٧}$ سم

عكس نظرية (٣)

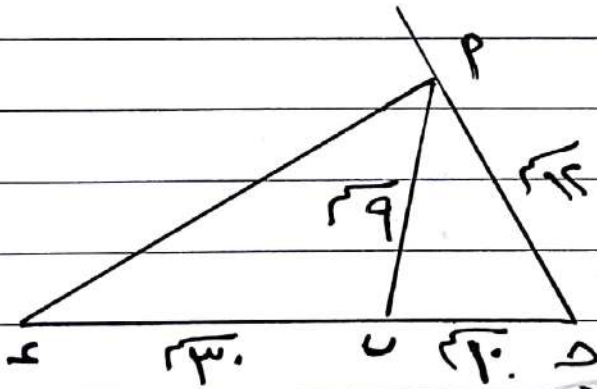
(١) (٢)

إذا كان $\frac{بء}{ءج} = \frac{أب}{أج}$

فإن $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ أ من الداخل كما في شكل (١)

" $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ أ من الخارج " " " " (٢)

مثال

في الشكل المقابل

أثبت أن

$\overleftrightarrow{أء}$ ينصف ∠ جأب من الخارج

الحل

∵ $\frac{جء}{ءب} = \frac{٤٠}{٣٠} = \frac{٤}{٣}$ ∵ $\frac{جأ}{أب} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{جء}{ءب} = \frac{جأ}{أب}$ ⟸ ∴ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف الزاوية الخارجية للمثلث أب ج عند الرأس أ

مثال

في الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{\text{ءص}}$ ينصف $\angle$ أءحـ

$\overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

ء منتصف $\overline{\text{بحـ}}$

أثبت أن

$\overleftrightarrow{\text{ءس}}$ ينصف $\angle$ أءب

الحل

∵ $\triangle$ أءحـ فيه $\overleftrightarrow{\text{ءص}}$ ينصف $\angle$ أءحـ من الداخل

∴ $\frac{\text{أص}}{\text{صحـ}} = \frac{\text{أء}}{\text{ءحـ}}$ ← (١)

∵ $\triangle$ أبحـ فيه $\overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

∴ $\frac{\text{أص}}{\text{صحـ}} = \frac{\text{أس}}{\text{سب}}$ ← (٢)   من (١)، (٢) ينتج

$\frac{\text{أس}}{\text{سب}} = \frac{\text{أء}}{\text{ءحـ}}$ ← (٣)   ∵ ءحـ = ءب بالتعويض في (٣)

∴ $\frac{\text{أس}}{\text{سب}} = \frac{\text{أء}}{\text{ءب}}$ في $\triangle$ أبء ∴ $\overleftrightarrow{\text{ءس}}$ ينصف $\angle$ أءب

* تدريب

في الشكل المقابل

$\overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

أوجد طول $\overline{\text{أص}}$

وإذا كان $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف

$\angle$ أ من الخارج

أوجد طول $\overline{\text{بحـ}}$

أ/ علي حمدون
تمارين
(١) في الشكل المقابل أوجد قيمة س العددية اذا كانت الاطوال مقاسة بالسنتيمتر.
(١)
(٢)
(٣)
(٤)
(٢) في الشكل المقابل
أب = ٣٢سم ، أجـ = ٢٨سم
بجـ = ١٦سم
بم ينصف ∠ أبجـ
أم ينصف ∠ بأجـ
اوجد طول أء
٥٩

(٣) في الشكل المقابل
أ ب = أ ء
ء منتصف $\overline{ب جـ}$
ب هـ ينصف ∠ ب
ء و ينصف ∠ أ ء جـ
أثبت أن
$\overline{هـ و}$ // $\overline{ب جـ}$

(٤) في الشكل المقابل
$\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب جـ}$
أ س ينصف ∠ ء أ هـ
أثبت أن
أ) $\frac{ء س}{س هـ} = \frac{ء ب}{هـ جـ}$
ب) $\frac{م(\triangle أ ء س)}{م(\triangle أ هـ س)} = \frac{أ ب}{أ جـ}$

(٥) في الشكل المقابل
$\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$
ب س = ٣ سم
أ ص = ٦ سم
وكان
$\frac{أ س + أ ص}{أ ب + أ جـ} = \frac{٣}{٥}$
اوجد طول $\overline{أ س}$ ، $\overline{جـ ص}$

تطبيقات التناسب في الدائرة

* قوة نقطة بالنسبة لدائرة :-

قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م التي نصف قطرها نق هو العدد الحقيقي قم(أ) حيث

قم(أ) = (أم)^2 - نق^2

مثال

أوجد قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م

(1) إذا كان أم = 12 سم ، نق = 9 سم

(2) إذا كان أم = 3 سم ، نق = 5 سم

الحل

(1) ∵ قم(أ) = (أم)^2 - نق^2

= (12)^2 - (9)^2 ∴ قم(أ) = 63

(2) ∵ قم(أ) = (أم)^2 - نق^2

= (3)^2 - (5)^2 ∴ قم(أ) = -16

ملاحظات هامة

(1) إذا كانت قم(أ) > 0 فإن :

نقطة أ تقع خارج الدائرة

(2) إذا كانت قم(أ) = 0 فإن :

نقطة أ تقع على الدائرة

(٣) اذا كانت قم(أ) < ٠ فان نقطة أ تقع داخل الدائرة

مثال

حدد موقع كل من النقط أ ، ب ، ح بالنسبة الى الدائرة م التي طول نصف قطرها ١٠ سم ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة اذا كان

(١) قم(أ) = -٣٦ (ب) قم(ب) = ٠ (ح) قم(ح) = ٩٦

الحل

(١) ∵ قم(أ) = -٣٦ < ٠ ∴ أ تقع داخل الدائرة

∵ قم(أ) = (أم)² - نق² ∴ -٣٦ = (أم)² - ١٠٠

∴ (أم)² = ٦٤ ← ∴ أم = ٨ سم

(٢) ∵ قم(ب) = ٠ ∴ ب تقع على الدائرة

∴ بم = نق = ١٠ سم

(٣) ∵ قم(ح) = ٩٦ > ٠ ∴ ح تقع خارج الدائرة

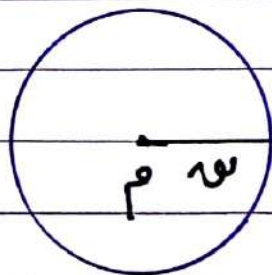
∵ قم(ح) = (حم)² - نق² ∴ ٩٦ = (حم)² - ١٠٠

∴ (حم)² = ١٩٦ ← ∴ حم = ١٤ سم

* تدريب :

اذا كانت م دائرة ، أ نقطة تقع في مستويها بحيث أم = ٦ سم ، قم(أ) = -١٣ فان :

(١) مساحة هذه الدائرة = ... (π = ٢٢/٧)

(٢) محيط هذه الدائرة = ... (π = ٢٢/٧)

ملاحظات هامة

* الشكل المقابل يمكن استنتاج أن
إذا كانت أج مماسة للدائرة م فإن:

(أج)^2 = (أم)^2 − نق^2

∴ (أج)^2 = ق$_{م}$(أ) ⟵ *** (1)

أي أن مربع طول قطعة المماسة المرسومة من نقطة خارج الدائرة يساوي قوة هذه النقطة بالنسبة للدائرة

∵ (أج)^2 = أب × أد

∴ ق$_{م}$(أ) = أب × أد ⟵ *** (2)

* ∵ أب × أج = أهـ × أد

∴ ق$_{م}$(أ) = أب × أج = أهـ × أد ⟵ (3)

* إذا كانت أ ∈ الوتر ب هـ فإن

ق$_{م}$(أ) = − أب × أهـ

* إذا كان $\overleftrightarrow{بج} \cap \overleftrightarrow{دهـ} = \{أ\}$

فإن $ق_م(أ) = -$ أب × أج

$= -$ أد × أهـ

مثال

في الشكل المقابل إذا كانت

$\overline{أج}$ مماسة للدائرة

م عند نقطة ج

فإن طول $\overline{أج}$ = ...

الحل

∵ $\overleftrightarrow{أج}$ مماسة للدائرة ∴ $(أج)^2 = ق_م(أ)$

∴ $(أج)^2 = (أم)^2 - نق^2$

$= (١٣)^2 - (٥)^2$ ∴ أج = ١٢ سم

مثال

في الشكل المقابل

$ق_م(أ) =$ ....

الحل

∵ أ ∈ $\overline{جب}$ الوتر

∴ $ق_م(أ) = -٣ \times ٥ = -١٥$

مثال

دائرة طول نصف قطرها ٣١ سم ، النقطة أ تبعد عن مركزها ٢٣ سم . رسم الوتر ب ح حيث أ ∈ ب ح ، أ ب = ٣ أ ح أحسب طول ب ح

الحل

∵ أم = ٣١ سم

نق = ٢٣ سم ، أب = ٣ أح

∵ أ ∈ الوتر ب ح

∴ $ق_م(أ)$ = - أب × أح

، (أم)^2 - نق^2 = - ٣ أح × أح

∴ (٣١)^2 - (٢٣)^2 = -٣(أح)^2 ∴ -٤٣٢ = -٣(أح)^2

∴ أح = ١٢ سم ∴ ب ح = أب + أح

= ٣ أح + أح

∴ ب ح = ٣٦ + ١٢ = ٤٨ سم

مثال

في الشكل المقابل

$ق_م(أ)$ = ...

الحل

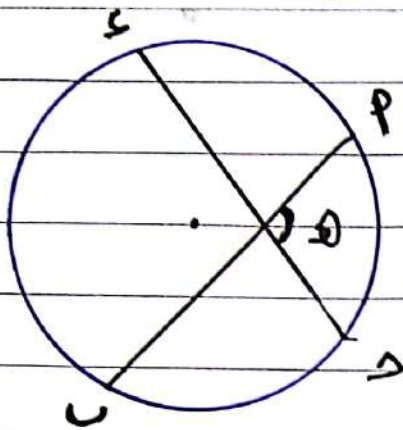
بفرض أن أب = د هـ = س ∴

∵ أب × أح = أد × أهـ ∴ س(س+٤) = ٤(٤+س)

∴ س^2 + ٤س = ١٦ + ٤س ∴ س^2 = ١٦ ∴ س = ٤ سم

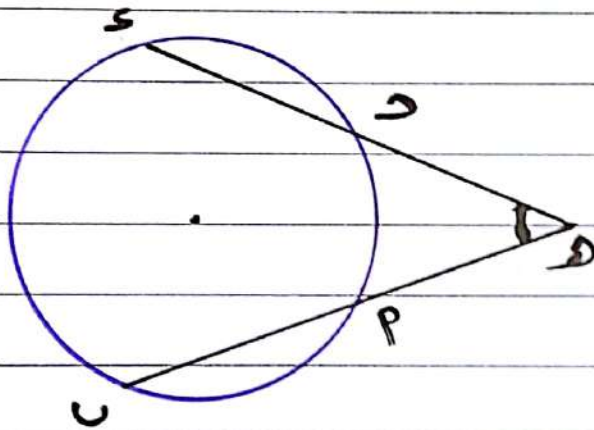
∵ $ق_م(أ)$ = أب × أح ∴ $ق_م(أ)$ = ٤ × ٨ = ٣٢

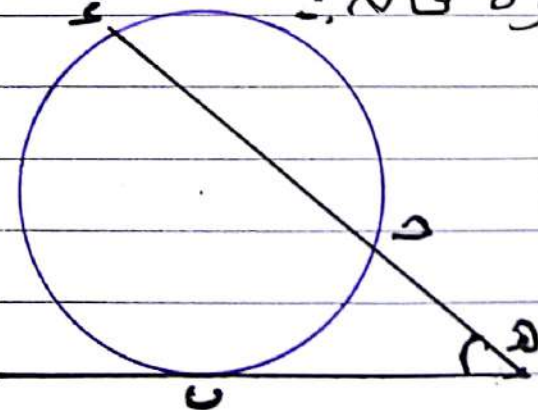
أ/ علي حمدون

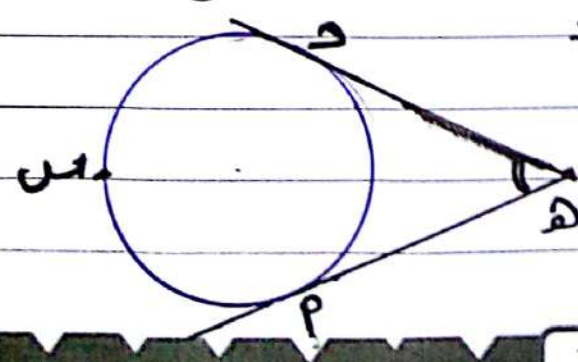
القاطع والمماس وقياسات الزوايا

(١) اذا تقاطع وتران داخل دائرة فانه :-

ق(أ هـ^ حـ) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌢ب ء) + ق(⌢أ حـ)]

(٢) اذا تقاطع امتداد وترين خارج الدائرة فانه :-

ق(هـ^) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌢ب ء) - ق(⌢أ حـ)]

(٣) اذا تقاطع قاطع ومماس للدائرة فانه :-

ق(هـ^) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌢ب ء) - ق(⌢ب حـ)]

(٤) اذا تقاطع مماسان للدائرة فانه :-

ق(هـ^) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌢أ س ب) - ق(⌢أ حـ)]

مثال أوجد قيمة س العددية في الأشكال الآتية :

الحل

(١) س = $\frac{1}{2}$ [١٠٠° + ٤٠°] = ٧٠°

(٢) س = $\frac{1}{2}$ [١٣٠° − ٥٠°] = ٤٠°

(٣) س + ٢٥° = $\frac{1}{2}$ [١٧٠° − ٨٠°] = ٤٥° ∴ س = ٢٠°

(٤) ∵ قياس القوس ⌒ جـ د الأصغر = ٣٦٠° − ٢٤٠° = ١٢٠°

∴ س = $\frac{1}{2}$ [٢٤٠° − ١٢٠°] = ٦٠°

ملاحظات هامة

تسمى مجموعة النقاط التي لها نفس القوة بالنسبة لدائرتين مختلفتين بنقاط المحور الاساسي للدائرتين فاذا كان $ق_م(أ) = ق_ن(أ)$ فإنه أ تقع على المحور الاساسي للدائرتين م، ن

مثال

في الشكل المقابل

اذا كانت

س ء = ٢ ء حـ

هـ و = ٢٠ سم

$ق_ن(س) = ١٤٤$

(١) أثبت أن $\overleftrightarrow{أب}$ محور أساسي للدائرتين

(٢) اوجد طول كل من $\overline{س حـ}$ ، $\overline{س و}$

(٣) أثبت أن الشكل حـ ء و هـ رباعي دائري

الحل

(١) ∵ أ تقع على الدائرة م ، أ تقع على الدائرة ن

∴ $ق_م(أ) = ٠$ ، $ق_ن(أ) = ٠$

∴ $ق_م(أ) = ق_ن(أ) = ٠$

∴ أ ∈ المحور الاساسي للدائرتين م، ن ← (١)

بالمثل ب تقع على الدائرتين م، ن

∴ $ق_م(ب) = ق_ن(ب) = ٠$

∴ ب ∈ المحور الاساسي للدائرتين م، ن ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

$\overleftrightarrow{أب}$ محور أساسي للدائرتين م ، ن ← أولاً

(٢) ∵ س ∈ المحور الأساسي للدائرتين م ، ن

∴ $ق_م(س) = ق_ن(س) = ١٤٤$

∵ $ق_م(س) = ١٤٤ = س ء \times س ح$ ← (١)

∵ $س ء = ٢ ء ح$ معطى

∴ $س ء = \frac{٢}{٣} س ح$

بالتعويض في (١) ينتج $١٤٤ = \frac{٢}{٣} س ح \times س ح$

∴ $(س ح)^٢ = ٣ \times ٧٢$ ومنها $س ح = ٦\sqrt{٦}$ سم

(أ) ∵ $ق_ن(س) = ١٤٤ = س و \times س هـ$

∴ $١٤٤ = س و (س و + ١٠)$ ∴ $(س و)^٢ + ١٠ س و - ١٤٤ = ٠$

$(س و - ٨)(س و + ١٨) = ٠$ ∴ $س و = ٨$ سم

(٣) ∵ $ق_م(س) = ق_ن(س)$

∴ $س ء \times س ح = س و \times س هـ$

∴ ء ، ح ، و ، هـ تقع على دائرة واحدة (عكس التمرين المشهور ١)

∴ الشكل ح ء هـ و رباعي دائري

مثال

م ، ن دائرتان متماستان من الخارج في أ ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك للدائرتين م ، ن

$\overrightarrow{بح}$ يقطع الدائرة م في ح ، ء ، $\overrightarrow{به}$ يقطع الدائرة ن في هـ ، و على الترتيب

أ/ علي حمدون

(١) أثبت أن $\overleftrightarrow{أب}$ محور اساسي للدائرتين م ، ن

(٢) اذا كان ق$_م$(ب) = ٣٦ ، ب جـ = ٤ سم ، هـ و = ٩ سم

اوجد طول كلاً من $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{أب}$ ، $\overline{ب هـ}$

الحل

(١) ∵ أ تقع على الدائرة م ، أ تقع على الدائرة ن

∴ ق$_م$(أ) = ق$_ن$(أ) = صفر ← (١)

∵ $\overline{أب}$ مماس للدائرة م ∴ (أب)^2 = ق$_م$(ب)

∵ $\overline{أب}$ مماس للدائرة ن ∴ (أب)^2 = ق$_ن$(ب)

∴ ق$_م$(ب) = ق$_ن$(ب) ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أ ، ب ∈ المحور الاساسي للدائرتين

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ محور اساسي للدائرتين م ، ن ، أب = ٦ سم

(٢) ∵ ب ∈ المحور الاساسي ∴ ق$_م$(ب) = ق$_ن$(ب) = ٣٦

∴ ق$_م$(ب) = ٣٦ = ب جـ × ب ء ∴ ٣٦ = ٤ ب ء

∴ ب ء = ٩ سم ⟸ ∴ ء جـ = ٥ سم

(iii) ∵ ق$_ن$(ب) = ٣٦ ∴ ٣٦ = ب هـ × ب و

∴ ٣٦ = ب هـ (ب هـ + ٩) ∴ ٣٦ = (ب هـ)^2 + ٩ ب هـ

∴ (ب هـ)^2 + ٩ (ب هـ) − ٣٦ = ٠

∴ (ب هـ − ٣)(ب هـ + ١٢) = ٠ ∴ ب هـ = ٣ سم

تمارين

(١) حدد موقع النقط أ ، ب ، جـ بالنسبة للدائرة م التي طول نصف قطرها ٦ سم ثم أحسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة في الحالات الآتية

① ق م (أ) = ١٥ ② ق م (ب) = صفر ③ ق م (جـ) = -٤

(٢) إذا كان بعد نقطة عن مركز دائرة يساوي ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة للدائرة تساوي ٤٠٠ أوجد طول نصف قطر الدائرة

(٣) الدائرة م طول نصف قطرها ٨ سم ، النقطة ب تبعد ١٢ سم عن مركز الدائرة . رسم مستقيم يمر بالنقطة ب ويقطع الدائرة في نقطتين جـ ، ء حيث جـ ب = جـ ء أحسب طول الوتر جـ ء وبعده عن مركز الدائرة

(٤) أوجد القيمة العددية لـ س في كل من الأشكال الآتية